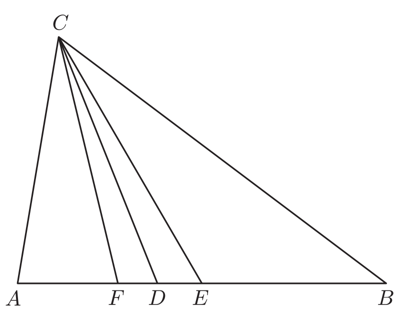
Krótka opowieść o symedianie

Małgorzata DUTKA laureatka XXXI Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, I LO Bydgoszcz

Zechciejcie państwo wysłuchać dziś krótkiej opowieści z królestwa geometrii. Za siedmioma górami matematycznych podręczników, za siedmioma rzekami matematycznych równań, za siedmioma lasami matematycznych sprzeczności znajdowała się symediana. Dziś symediana ujrzy światło dzienne. Jednak na samym początku powinniśmy złożyć podziękowanie francuskiemu matematykowi i inżynierowi budownictwa, panu Émile'owi Lemoine'owi (1840–1911), którego to zasługą jest uwiecznienie tego pojęcia, a także sformułowanie wielu twierdzeń z nim związanych. Matematyczny świat oddał mu hołd w sobie tylko znany sposób – twierdzeniom związanym z symedianą niejednokrotnie nadając nazwy zawierające jego nazwisko. W poniższym artykule przytoczę wiele ciekawych związków dla równie ciekawej prostej, związków noszących nazwisko tego francuskiego matematyka.

Definicja symediany. *Symedianą* nazywamy prostą, będącą obrazem symetrycznym środkowej wychodzącej z danego wierzchołka trójkąta względem dwusiecznej kąta wewnętrznego znajdującego się przy tym samym wierzchołku. Z wierzchołka C trójkąta ABC prowadzimy dwusieczną CD oraz środkową CE. Odbijamy wówczas prostą CE względem prostej CD. Otrzymujemy prostą CF – w poniższym artykule mówiąc o symedianie, będę miała na myśli właśnie odcinek tej prostej ograniczony przez dany trójkąt.



Rys. 1

Pierwsze i jednocześnie zasadnicze twierdzenie charakteryzujące symedianę w swojej nazwie nie zawiera nazwiska Lemoine'a. Jednak bez tej własności nie bylibyśmy w stanie wykazać następnych zależności.

Twierdzenie o podziale boku. *Symediana poprowadzona z jednego wierzchołka trójkąta dzieli wewnętrznie przeciwległy bok proporcjonalnie do kwadratów długości boków przyległych. Według oznaczeń standardowych, takich że $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$* (rys. 1) *otrzymujemy związek*

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dowód tego faktu opiera się bezpośrednio na twierdzeniu sinusów zastosowanym dla par trójkątów: AFC, BEC oraz AEC, BFC.

Stosunek podziału boku przez symedianę przypomina stosunek podziału boku trójkąta przez dwusieczną. Różnica polega tak naprawdę jedynie na obecności stosunku kwadratów długości boków, a nie samych długości boków. Ponadto prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia o podziale boku. *Jeżeli prosta poprowadzona z jednego wierzchołka trójkąta dzieli wewnętrznie przeciwległy bok proporcjonalnie do kwadratów długości boków przyległych, to jest ona symedianą.*

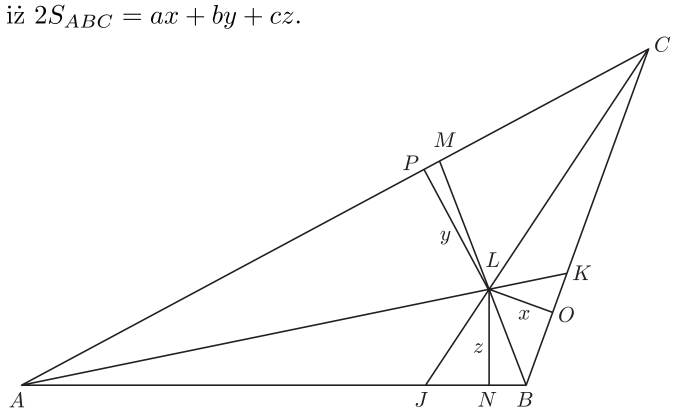
W dowodzie twierdzenia zakładamy, że istnieje prosta spełniająca stosunek z poprzedniego twierdzenia i jednocześnie niebędąca symedianą. Dojdziemy wówczas do sprzeczności, która kończy dowód.

Powróćmy do pana Lemoine'a. Ten zacny francuski matematyk doczekał się swojego własnego punktu. Cóż to za punkt? Kierując się analogią do innych prostych w trójkącie, możemy łatwo się domyślić! Symediany również przecinają się w jednym punkcie. Jest to punkt oznaczany standardowo literą L i nazywany punktem Lemoine'a. Dowód tego faktu opiera się jedynie na twierdzeniu odwrotnym do twierdzenia Cevy, wykorzystującym stosunek podziału boku.

Okazuje się również, że punkt L ma bardzo charakterystyczne położenie wewnątrz trójkąta.

Twierdzenie o minimalnej sumie odległości punktu Lemoine'a od boków trójkąta. *Jeżeli dany punkt wewnątrz trójkąta spełnia warunek mówiący, że suma kwadratów jego odległości od boków trójkąta przyjmuje minimum, to ten punkt jest punktem przecięcia symedian.*

Dowód. Niech L będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC oraz $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Korzystając z oznaczeń na rysunku 2, możemy napisać, iż $2S_{ABC} = ax + by + cz$.



Rys. 2

Z nierówności Cauchy'ego–Schwarza otrzymujemy:

$$4S_{ABC}^2 = (ax + by + cz)^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dla danych a, b, c wyrażenie $x^2+y^2+c^2$ przyjmuje wartość najmniejszą, gdy zachodzi równość, a ta ma miejsce dla

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

Zauważamy jednocześnie, że $\frac{AJ}{JB}=\frac{S_{ALJ}}{S_{BLJ}}$, $\frac{AJ}{JB}=\frac{S_{ACJ}}{S_{BCJ}}$,

$$\frac{AJ}{BJ}=\frac{S_{ACJ}-S_{ALJ}}{S_{BCJ}-S_{BLJ}}=\frac{S_{ALC}}{S_{BLC}}=\frac{\frac{1}{2}by}{\frac{1}{2}ax}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o podziale boku przez symedianę wnioskujemy, że punkt L jest punktem przecięcia symedian. □

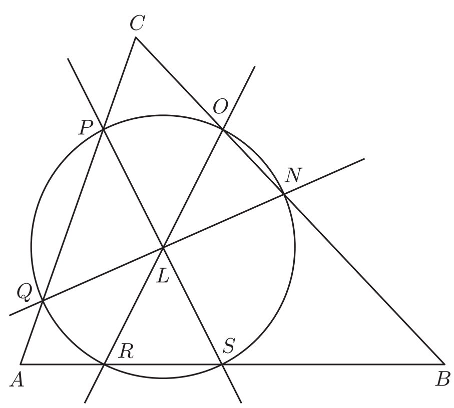
Z symedianą związane są również charakterystyczne okręgi. Wśród nich można wyróżnić okręgi bezpośrednio związane z punktem Lemoine'a. Do wykonania konstrukcji pierwszego okręgu Lemoine'a pomocne będzie przypomnienie definicji antyrównoległej.

Definicja. Antyrównoległą do boku AB w trójkącie ABC nazywamy prostą przecinającą przeciwległy do kąta A bok pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku A oraz bok przeciwległy do wierzchołka B pod takim samym kątem, jaki jest przy wierzchołku B.

Zwróćmy uwagę również na charakterystyczny związek symediany i antyrównoległych.

Twierdzenie o podziale antyrównoległych przez symediany. *Symediana poprowadzona z wierzchołka C trójkąta ABC dzieli antyrównoległe względem boku AB na połowy.*

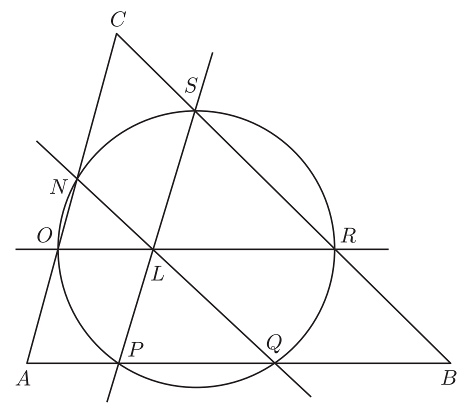
Pierwszy okrąg Lemoine'a. *Aby skonstruować pierwszy okrąg Lemoine'a, musimy poprowadzić antyrównoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wówczas punkty przecięcia tych antyrównoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu zwanym właśnie pierwszym okręgiem Lemoine'a.*



Rys. 3

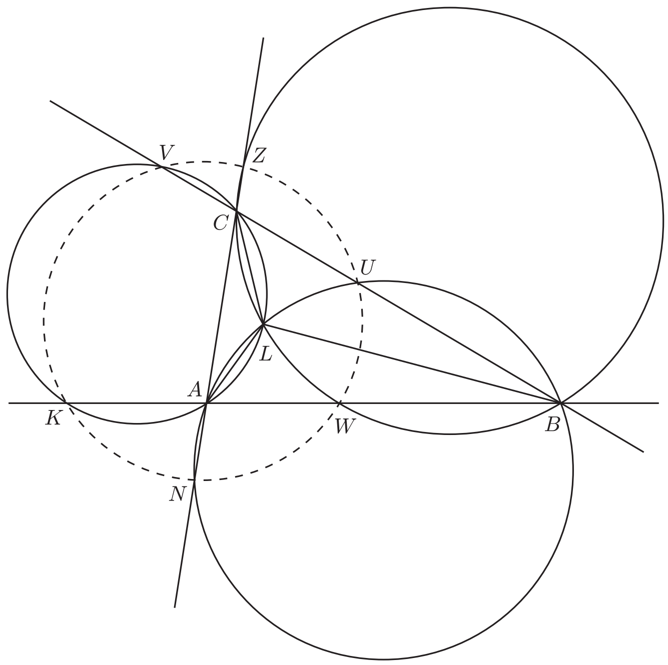
Dowód. Z twierdzenia o podziale antyrównoległych przez symediany wiemy, że $PL=LS$, $NL=LQ$, $RL=LO$ (rys. 3). Ponadto zauważamy, że jeżeli proste RO i SP są antyrównoległymi do boków AC i BC, to $\sphericalangle LRS=\sphericalangle LSR=\sphericalangle C$. Zauważamy wówczas, że trójkąt LSR jest równoramienny, czyli $LS=LR$. Oznacza to również, że $LS=LR=LO=LP$. Wówczas cztery punkty: S, R, P oraz O są równo oddalone od punktu L, czyli leżą na jednym okręgu. Takie samo rozumowanie możemy poprowadzić dla prostej QN. Jeżeli proste PS i QN są antyrównoległymi do boków BC i AB, to $\sphericalangle LQP=\sphericalangle LPQ=\sphericalangle B$. Zatem trójkąt PLQ jest równoramienny, co oznacza, że $LQ=LP$, ale również na podstawie podziału antyrównoległej przez symedianę $LQ=LP=LS=LN$ – podsumowując: $LS=LR=LP=LO=LQ=LN$. Zatem wszystkie te punkty są równo odległe od punktu L, co oznacza, że leżą na jednym okręgu, mającym środek w punkcie L. □

Drugi okrąg Lemoine'a. *Aby skonstruować drugi okrąg Lemoine'a, musimy poprowadzić równoległe do każdego z boków trójkąta, przechodzące przez punkt przecięcia symedian. Wówczas punkty przecięcia tych równoległych z bokami trójkąta leżą na jednym okręgu zwanym właśnie drugim okręgiem Lemoine'a.*



Rys. 4

Dowód. Łatwo zauważyć, że czworokąt $CSLN$ (rys. 4) jest równoległobokiem. W każdym równoległoboku przekątne połowią się. Zatem odcinek CL dzieli na pół odcinek SN. Zauważamy również, że odcinek CL należy do symediany trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C. Skoro CL należy do symediany oraz dzieli odcinek SN na połowę, to prosta SN musi być antyrównoległą do boku AB (łatwo wywnioskować to z twierdzenia o podziale antyrównoleglych). Wówczas $\sphericalangle CSN=\sphericalangle A=\sphericalangle NOR$. Stąd punkty N, O, R, S muszą leżeć na jednym okręgu oznaczonym jako o_1, gdyż $\sphericalangle NSR+\sphericalangle NOR=180°$. Analogicznie punkty Q, N, O, P muszą leżeć na jednym okręgu oznaczonym jako o_2. Weźmy teraz pod uwagę czworokąt $PONS$. Zauważymy wówczas, że jest to trapez o podstawach NO oraz PS. Skoro NS jest antyrównoległa do boku AB oraz OP jest antyrównoległa do boku BC, to $\sphericalangle CNS=\sphericalangle AOP=\sphericalangle B$. Oznacza to, że $\sphericalangle NOP=\sphericalangle SNO$, czyli trapez $SNOP$ jest równoramienny, zatem można na nim opisać okrąg o_3. Podsumowując, wszystkie trzy okręgi muszą się pokrywać, gdyż wspólny okrąg o_1 oraz o_3 wyznaczają trzy punkty: S, N, O, natomiast wspólny okrąg o_2 oraz o_3 wyznaczają trzy punkty: N, O, P. Ale wszystkie z wymienionych punktów leżą na jednym okręgu (punkty: S, N, O, P). □



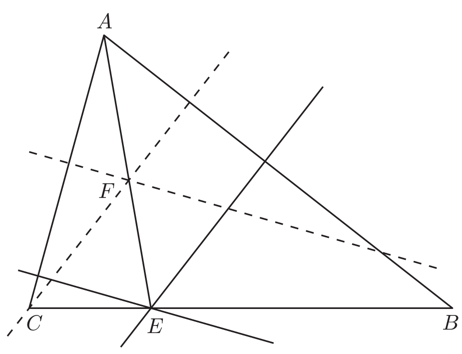
Rys. 5

Istnieje również trzeci okrąg Lemoine'a. Jego konstrukcja jest już nieco bardziej złożona (rys. 5).

Trzeci okrąg Lemoine'a. *Niech L będzie punktem przecięcia symedian w trójkącie ABC. Wówczas na każdym z trójkątów: ALB, BLC, CLA opisujemy okręgi. Punkty przecięcia tych okręgów z bokami lub przedłużeniami boków trójkąta leżą również na jednym okręgu zwanym trzecim okręgiem Lemoine'a.*

Bezpośrednio z punktem Lemoine'a związany jest trójkąt o bardzo charakterystycznej własności. Do jej dowodu wykorzystamy jedną z własności dowolnego punktu należącego do symediany trójkąta.

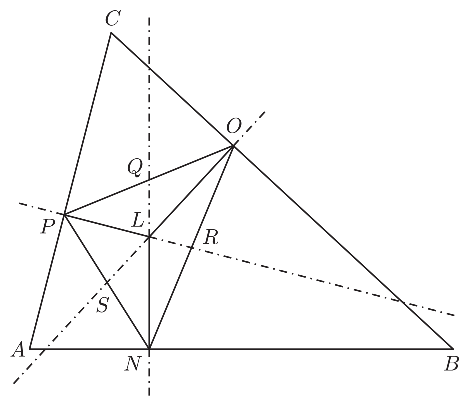
Twierdzenie o odległości punktu należącego do symediany od boków trójkąta. *Niech punkt E będzie punktem leżącym na boku BC trójkąta ABC. Jeżeli AE jest symedianą trójkąta ABC przechodzącą przez punkt A* (rys. 6), *to dla każdego punktu F, leżącego na prostej AE, zachodzi równość*
$$\frac{d(F,AB)}{d(F,AC)}=\frac{d(E,AB)}{d(E,AC)}=\frac{AB}{AC}.$$



Rys. 6

Twierdzenie o trójkącie spodkowym Lemoine'a. *Punkt Lemoine'a trójkąta ABC jest jednocześnie środkiem ciężkości trójkąta utworzonego poprzez połączenie rzutów punktu Lemoine'a na boki trójkąta ABC.*

Obserwujemy tutaj związek z symetrycznym odbiciem. Przecież symediana powstaje jako odbicie środkowej względem dwusiecznej, a wspólne położenie punktu przecięcia symedian i dwusiecznych dla tych trójkątów jest wyjątkowe.

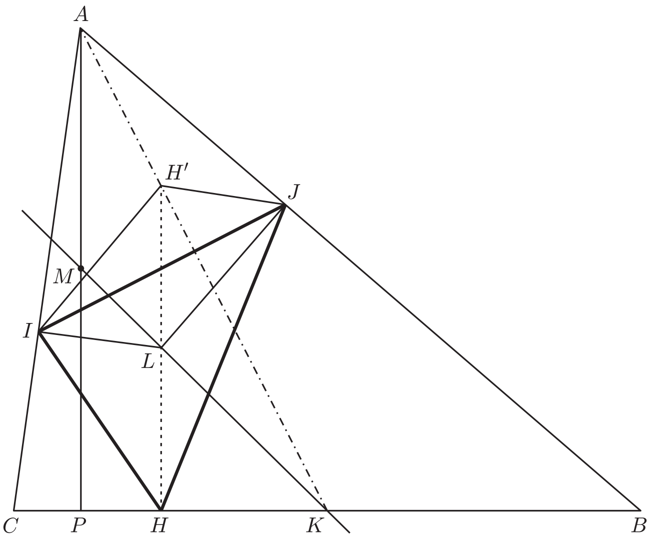


Rys. 7

Dowód. Niech Q (rys. 7) będzie punktem przecięcia odcinka PO oraz prostopadłej do boku AB, przechodzącej przez punkt Lemoine'a (L). Wówczas stosując twierdzenie sinusów, otrzymujemy zależność:
$$\frac{PQ}{QO}=\frac{PL}{OL}\cdot\frac{\sin\sphericalangle PLQ}{\sin\sphericalangle OLQ}.$$
Jeżeli CL jest symedianą w trójkącie ABC, to z twierdzenia o odległości punktu należącego do symediany od boków trójkąta otrzymujemy
$$\frac{PL}{LO}=\frac{d(L,CA)}{d(L,CB)}=\frac{CA}{CB}.$$
Ponadto $\sphericalangle QLO=\sphericalangle B$, $\sphericalangle QLP=\sphericalangle A$, gdyż na czworokątach $BOLN$ oraz $ANLP$ można opisać okręgi. Uwzględniając to w zapisie pierwszego związku, otrzymujemy
$$\frac{PQ}{QO}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle B}.$$
Ale z twierdzenia sinusów mamy
$$\frac{\sin\sphericalangle A}{\sin\sphericalangle B}=\frac{BC}{AC}.$$
Zatem
$$\frac{PQ}{QO}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}=1.$$
Stąd NQ jest środkową trójkąta NOP. Analogiczny tok rozumowania występuje w przypadku punktu S będącego punktem przecięcia odcinka PN oraz prostopadłej do boku BC, przechodzącej przez punkt Lemoine'a oraz dla punktu R będącego punktem przecięcia odcinka ON oraz prostopadłej do boku AC, przechodzącej przez punkt Lemoine'a. Stąd odcinki NQ, OS, PR są środkowymi w trójkącie NOP oraz punkt L jest również środkiem ciężkości tego trójkąta. □

Dociekliwy matematyk zapewne chciałby się dowiedzieć jeszcze dokładniej, gdzie w trójkącie znajduje się punkt przecięcia symedian.

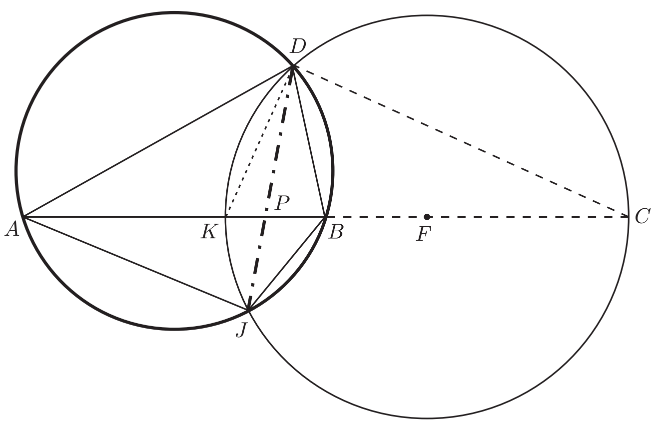
Twierdzenie o położeniu punktu Lemoine'a. *Punkt przecięcia symedian znajduje się na prostej zawierającej środek wysokości opuszczonej z jednego z wierzchołków oraz środek przeciwległego boku trójkąta.*



Rys. 8

Wskazówka. W dowodzie tego twierdzenia można wykorzystać twierdzenie o trójkącie spodkowym Lemoine'a. Pomocne okaże się odbicie punktu H względem punktu L.

Z symedianą spotkamy się również, gdy będziemy chcieli poznać bliżej okrąg Apoloniusza. Przypomnijmy, że *dla danych punktów A i B, gdzie A jest różne od B, oraz liczby dodatniej m, różnej od 1, zbiorem punktów G na płaszczyźnie, takich że $\frac{AG}{GB} = m$, jest okrąg, nazwany okręgiem Apoloniusza.*



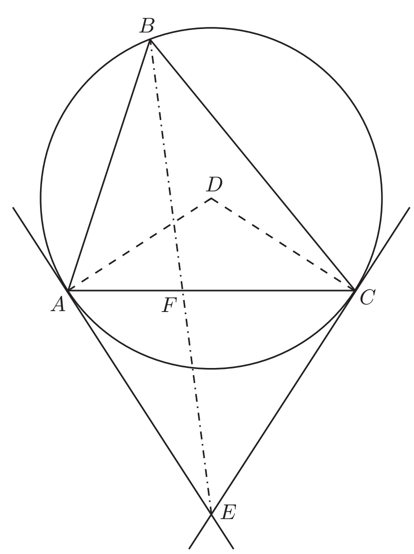
Rys. 9

Twierdzenie o symedianie i okręgu Apoloniusza. *Niech punkt J będzie takim różnym od wierzchołka D punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABD* (rys. 9), *że*
$$\frac{JB}{JA} = \frac{BD}{AD}.$$
Wówczas odcinek DJ jest symedianą trójkąta ABD, przechodzącą przez wierzchołek D.

Dowód. Niech P będzie punktem przecięcia prostej DJ z bokiem AB trójkąta ABD. Posługując się twierdzeniem sinusów, otrzymujemy zależność
$$\frac{BP}{PA} = \frac{JB}{JA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BJP}{\sin \sphericalangle PJA}.$$
Jednocześnie korzystając z założenia, że $\frac{JB}{JA} = \frac{BD}{AD}$, możemy napisać, iż
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{\sin \sphericalangle BJP}{\sin \sphericalangle PJA}.$$
Z własności kątów opartych na tym samym łuku wiemy, że $\sphericalangle DJB = \sphericalangle A$, $\sphericalangle DJA = \sphericalangle B$. Zatem
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B},$$
ale z twierdzenia sinusów wyciągamy wniosek, że
$$\frac{\sin \sphericalangle A}{\sin \sphericalangle B} = \frac{BD}{AD},$$
stąd
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BD^2}{AD^2}.$$
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o podziale boku przez symedianę wyciągamy wniosek, iż prosta DJ jest symedianą w trójkącie ABD, przechodzącą przez wierzchołek D. □

Ponadto ważną własnością symediany, niezwykle przydatną jako zastosowanie przy rozwiązywaniu zadań oraz związaną z okręgiem opisanym na trójkącie, jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie o stycznych do okręgu opisanego na trójkącie i o symedianie. *Na trójkącie ABC opisujemy okrąg o środku D* (rys. 10)*. Prowadzimy styczne do okręgu przechodzące przez wierzchołki A i C. Styczne te przecinają się w punkcie E. Wówczas odcinek BE jest symedianą trójkąta ABC, zawierającą wierzchołek B.*

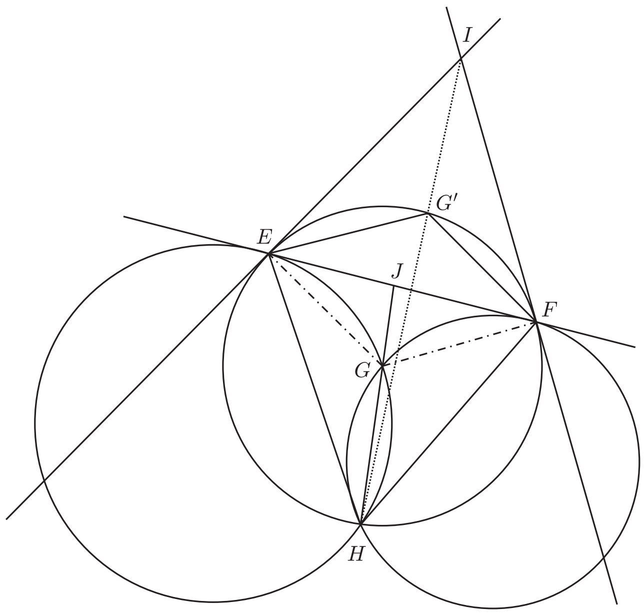


Rys. 10

Dowód pozostawiam Czytelnikom.

Ktoś, kto zapoznałby się jedynie z wyżej wymienionymi własnościami symediany, mógłby jej zarzucić brak przydatności w świecie zadań geometrycznych. Jednak okazuje się, że symediana z powodzeniem znajduje zastosowanie, na przykład, w zadaniach olimpijskich. Kluczem do pierwszego z nich będzie wyżej wymieniona zależności.

Zadanie 1 (Vietnam Team Selection Test 2001)**.** *Na płaszczyźnie dwa okręgi przecinają się w punktach G i H. Ich wspólna styczna, bliższa punktowi G, dotyka tych okręgów w punktach E i F. Opisujemy okrąg na trójkącie HEF. Styczne do niego przechodzące przez wierzchołki E i F przecinają się w punkcie I. Niech G' będzie obrazem punktu G w symetrii względem prostej EF. Udowodnij, że punkty H, G', I są współliniowe* (rys. 11).



Rys. 11

Rozwiązanie. Z twierdzenia o stycznych do okręgu opisanego na trójkącie i o symedianie wiemy, że odcinek HI jest symedianą trójkąta HEF, zatem należy wykazać, że również punkt G' leży na tej symedianie. Ponadto odcinek HG leży na środkowej trójkąta HEF. Wnioskujemy to z twierdzenia o potędze punktu:

$$JE^2 = JG \cdot JH = JF^2.$$

Więc $JE = JF$, czyli punkt J jest środkiem odcinka EF.

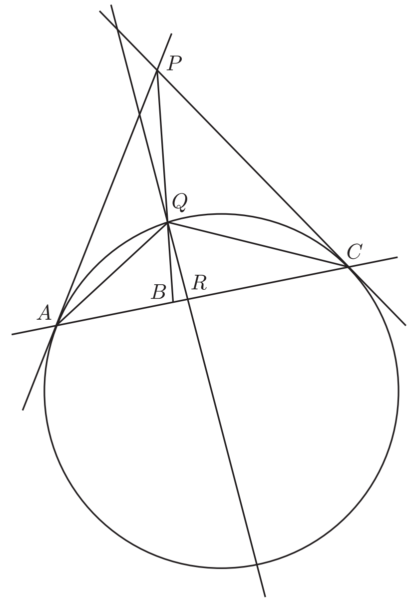
Jako że $\sphericalangle FG'E = \sphericalangle FGE = 180° - \sphericalangle GEF - \sphericalangle GFE = 180° - \sphericalangle GHE - \sphericalangle GHF = 180° - \sphericalangle EHF$, punkty $EHFG'$ leżą na jednym okręgu, stąd

$$\sphericalangle G'HF = \sphericalangle G'EF = \sphericalangle FEG = \sphericalangle GHE.$$

Zatem skoro GH jest środkową trójkąta HEF, to HG' jest symedianą tego trójkąta. Zatem punkty H, G', I leżą na jednej prostej.

Symedianą i jej własnościami można posłużyć się również jako narzędziami w dowodzie.

Zadanie 2 (Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna 2003)**.** *Trzy różne punkty A, B, C leżą kolejno na jednej prostej. Niech Γ będzie okręgiem przechodzącym przez punkty A i C, którego środek nie leży na prostej AC. Niech P będzie punktem przecięcia stycznych do okręgu w punktach A i C. Punkt przecięcia odcinka PB z okręgiem Γ oznaczmy jako Q. Udowodnij, że punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle AQC$ i odcinka AC nie zależy od wyboru okręgu* (rys. 12).



Rys. 12

Rozwiązanie. Niech QR będzie dwusieczną $\sphericalangle AQC$. Z twierdzenia o dwusiecznej możemy zapisać, że

$$\frac{AR}{RC} = \frac{AQ}{QC}.$$

Zatem należy wykazać, że stosunek z Q nie zależy od wyboru okręgu Γ. Z twierdzenia sinusów otrzymujemy, że

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin\sphericalangle ACQ}{\sin\sphericalangle CAQ}.$$

Ale korzystając z twierdzenia o siecznej i stycznej, mamy

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin\sphericalangle PAQ}{\sin\sphericalangle PCQ}.$$

Przekształcając powyższy związek, otrzymujemy:

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{\sin\sphericalangle PAQ}{\sin\sphericalangle PCQ} = \frac{\frac{PQ}{AP}\sin\sphericalangle AQP}{\frac{PQ}{CP}\sin\sphericalangle CQP} = \frac{\sin\sphericalangle AQP}{\sin\sphericalangle CQP} = \frac{\sin\sphericalangle AQB}{\sin\sphericalangle CQB} = \frac{\frac{AB}{AQ}\sin\sphericalangle ABQ}{\frac{CB}{CQ}\sin\sphericalangle CBQ} = \frac{AQ\cdot QC}{CB\cdot AQ}.$$

Zatem

$$\frac{AQ^2}{QC^2} = \frac{AB}{CB}.$$

Zatem QB jest symedianą w trójkącie ACQ. Powyższe stwierdzenie potwierdza, że punkt przecięcia dwusiecznej $\sphericalangle AQC$ i odcinka AC nie zależy od wyboru okręgu Γ.

Na tym zakończę dzisiejszą opowieść, choć muszę ostrzec, że pokazane przeze mnie twierdzenia to tylko kilka wybranych zależności. Możemy, na przykład, wyznaczyć również długość symediany za pomocą twierdzenia Stewarta czy stosunek jej podziału przez punkt Lemoine'a za pomocą twierdzenia van Aubela. Podsumowując to opowiadanie, dodam, że nie wiem, czy symediana będzie żyła długo i szczęśliwie, ale mam nadzieję, że pozostanie w pamięci Czytelników.