

## Laureaci Konkursu Uczniowskich prac z Matematyki

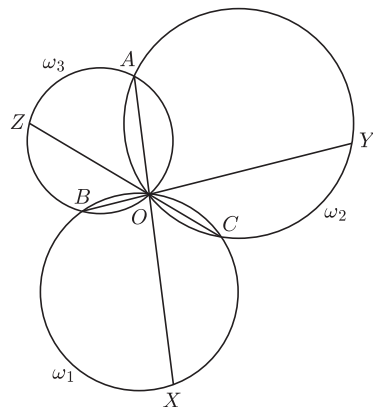
(Z) złoci, (S) srebrni i (B) brązowi

<b>1978</b> (Z) Paweł Domański (S) Urszula Lach (B) Bogusława Grzywacz	<b>1984</b> (Z) Michał Wojciechowski (S) Bogdan Pelc (B) Joanna Karwowska	<b>1992</b> (Z) Marek Pycia (B) Krystian Witkowski	<b>1999</b> (Z) Jakub Onufry Wojtaszczyk (S) Łukasz Kamiński (S) i Paweł Rochman	<b>2005</b> (Z) Michał Marcinkowski (S) Paweł Janic (S) Tomasz Warszawski (B) Arkadiusz Męcel (B) Marcin Pitera (B) Jan Szejko	<b>2010</b> (Z) Michał Miśkiewicz (S) Tomasz Pelka (S) Mateusz Wróbel (B) Bartosz Górecki
<b>1979</b> (Z) Dorota Kuchta (Z) i Paweł Ponikowski (S) Marek Kubowicz (B) Anna Brzezińska	<b>1985</b> (Z) Piotr Hajłasz (S) Bogdan Pelc	<b>1993</b> (S) Ilona Królak (B) Roman Wencel	<b>2000</b> (S) Piotr Sulich (S) Mirosław Żwiryn	<b>2006</b> (Z) Jan Szejko (S) Krzysztof Dorobisz (S) Tomasz Tkocz (B) Aleksander Kubica	<b>2011</b> (Z) Wojciech Nadara (S) Aleksander Czarnecki (S) Anna Dymek (B) Adam Baranowski
<b>1980</b> (Z) Zbigniew Jelonek (S) Robert Cozaś (B) Waldemar Holubowski	<b>1986</b> (Z) Piotr Jędrzejewicz	<b>1994</b> (S) Piotr Śniady (B) Piotr Matusiewicz	<b>2001</b> (Z) Juliusz Jabłecki (S) Piotr Sulich (B) Łukasz Brzyski (B) Jan Kowal	<b>2007</b> (Z) Tomasz Kobos (S) Magdalena Bojarska (S) Mateusz Pluta (B) Mikołaj Bińkowski (B) Przemysław Mazur	<b>2012</b> (Z) Wojciech Nadara (Z) Bartłomiej Zawalski (S) Dominik Burek (S) Aleksander Horawa (B) Anna Szczepańska
<b>1981</b> (Z) Jarosław Wróblewski (S) Jacek Rzeźnikowski (B) Elżbieta Ziarko	<b>1988</b> (Z) Andrzej Daniluk (S) Adam Czornik	<b>1996</b> (Z) Michał Stukow (S) Adam Osękowski (B) Tomasz Kowalski (B) i Artur Wirowski	<b>2002</b> (Z) Wiesław Zajiczek (B) Łukasz Lach (B) Krzysztof Rutczyński	<b>2008</b> (Z) Joachim Jelisiejew (S) Martha Ubiak (S) Adam Wyrzykowski (B) Mikołaj Bińkowski (B) Jacek Rzeniewicz	<b>2013</b> (Z) Kamil Rychlewicz (S) Samuel Kozłowski (B) Bartłomiej Grochal (B) Rafał Żelazko
<b>1982</b> (Z) Mariusz Skalba (S) Janusz Kalinowski (B) Mirosław Matłęga	<b>1989</b> (Z) Krzysztof Oleszkiewicz (S) Rafał Kapelko (B) Katarzyna Trójka	<b>1997</b> (Z) Grzegorz Kapustka (Z) i Michał Kapustka (B) Maciej Mostowski	<b>2003</b> (Z) Marcel Kołodziejczyk (Z) Aleksandra Kwiatkowska (S) Juliusz Jabłecki (B) Krzysztof Mroczek (B) Piotr Szafruga	<b>2009</b> (S) Martha Ubiak (B) Michał Zajac	<b>2014</b> (Z) Paweł Piwek (Z) Artur Zubilewicz (S) Michał Baran (S) Kamil Klimkowski
<b>1983</b> (Z) Jacek Kaleta (S) Wojciech Walecki (B) Henryk Łukomski	<b>1991</b> (Z) Marcin Kasperski (S) Grzegorz Zwara (B) Małgorzata Sęk	<b>1998</b> (S) Michał Ślęzak (S) i Michał Tkacz (B) Jakub Gismatullin	<b>2004</b> (Z) Marcin Pitera (S) Agnieszka Kałużna (B) Lech Stawikowski		



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



**M 1444.** Okręgi  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  mają wspólny punkt  $O$ , a ponadto  $\omega_2, \omega_3$  przecinają się jeszcze w punkcie  $A$  i podobnie  $\omega_3, \omega_1$  i  $\omega_1, \omega_2$  – w punkcie  $B, C$  odpowiednio. Prosta  $AO$  przecina  $\omega_1$  ponadto w punkcie  $X$  i podobnie  $BO$  przecina  $\omega_2$  w  $Y$ , a  $CO$  przecina  $\omega_3$  w  $Z$  (rysunek). Udowodnić, że

$$\frac{AY}{AZ} \cdot \frac{BZ}{BX} \cdot \frac{CX}{CY} = 1.$$

Rozwiązanie na str. 11

**M 1445.** Niech funkcja  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  spełnia dla dowolnych liczb dodatnich  $x, y$  równość

$$f(x) \cdot f(y) \cdot f(x+y) = f(x+y).$$

Udowodnić, że  $f$  jest nierosnąca.

Rozwiązanie na str. 23

**M 1446.** Rozpatrzmy następującą grę. Przed rozpoczęciem dany jest stos z  $k$  monetami. Gracz wykonujący ruch musi usunąć 1, 4 lub 5 monet ze stosu. Gracze wykonują ruchy na przemian. Jeśli któryś *nie* może wykonać ruchu, to przegrywa. Rozstrzygnąć, kto ma strategię wygrywającą, gdy  $k = 2015$ .

Rozwiązanie na str. 15

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 871.** Oszacuj, jaka jest największa możliwa wysokość  $h$  gór na Ziemi. Przyjmij, że typowym składnikiem skał magmowych jest dwutlenek krzemu ( $\text{SiO}_2$ ), przyspieszenie ziemskie  $g \approx 10 \text{ m/s}^2$  nie zależy od wysokości, a górę można wyobrazić sobie jako duży prostopadłościan. Ciepło topnienia  $L$  różnych postaci krystalicznych dwutlenku krzemu mieści się w granicach od  $L = 237 \text{ J/g}$  (kwarc) do  $L = 128 \text{ J/g}$  (krystobalit).  
Rozwiązanie na str. 5

**F 872.** Na podstawie łatwych do zmierzenia w pracowni szkolnej wielkości: energii parowania wody  $L_p = 2260 \text{ J/g}$

i napięcia powierzchniowego woda-powietrze (energia jednostki powierzchni swobodnej wody)  $\gamma = 58,9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$  (w  $100^\circ\text{C}$ ) oszacuj liczbę cząsteczek wody w  $1 \text{ cm}^3$ . Gęstość wody  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ .

*Wskazówka:* Możesz przyjąć, że upakowania cząsteczek kryształu (lodu) i cieczy (wody) są w grubym przybliżeniu podobne oraz że cząsteczki tworzą sześcienną sieć, a każda para najbliższych sąsiadów połączona jest takim samym wiązaniem o energii  $\epsilon$ .  
Rozwiązanie na str. 10