Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

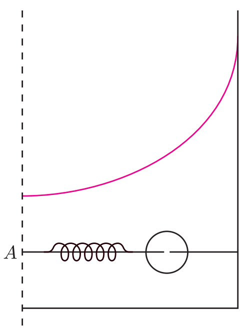
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 590, 591

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

590. W naczyniu w kształcie walca znajduje się ciecz o gęstości ρ. Walec obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół własnej osi. Wewnątrz walca, wzdłuż jego promienia, umocowany jest cienki pręt AB. Po pręcie może ślizgać się bez tarcia koralik w kształcie kuli o masie m i promieniu r (rys. 1). Kula połączona jest z końcem A pręta za pomocą sprężyny o współczynniku sprężystości k. Długość nieodkształconej sprężyny wynosi l_0. Znaleźć odległość środka kuli od osi obrotu.



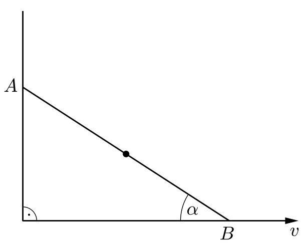
Rys. 1

591. Na sferze o promieniu R, złożonej z dwóch półsfer, równomiernie rozłożony jest ładunek Q. Jaką siłą trzeba działać na każdą półsferę, aby nie rozsuwały się one pod wpływem oddziaływania ładunków?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

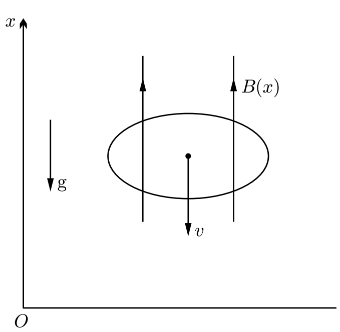
Przypominamy treść zadań:

582. W środku nieważkiego pręta o długości $2l$ przyczepiona jest mała kulka o masie m. Pręt porusza się jak na rysunku 2. Koniec B pręta porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością v, koniec A porusza się wzdłuż pionowej ściany. Jaką siłę reakcji wywiera pręt na kulkę, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$?



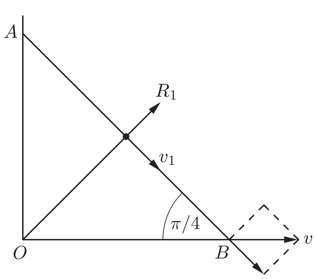
Rys. 2

583. Metalowy pierścień o promieniu l i oporze R spada pod działaniem siły ciężkości w polu magnetycznym. Wartość wektora indukcji magnetycznej w kierunku pionowym zmienia się z wysokością zgodnie ze wzorem $B(x) = B_0(1 - \alpha x)$, gdzie stała α jest dodatnia (rys. 3). Znaleźć zależność siły hamującej ruch pierścienia od jego prędkości. Płaszczyzna pierścienia pozostaje prostopadła do linii pola magnetycznego.



Rys. 3

582. Kulka porusza się po okręgu o środku w punkcie O (rys. 4), bo znajduje się w połowie przeciwprostokątnej trójkąta AOB. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$, prędkość kulki jest skierowana wzdłuż pręta i ma wartość $v_1 = \frac{v\sqrt{2}}{2}$, bo wszystkie punkty sztywnego pręta mają taką samą składową prędkości wzdłuż pręta. Oznaczając przez R_1 składową siły reakcji prostopadłą do pręta i przyjmując, że ma ona zwrot jak na rysunku, możemy napisać wzór na siłę dośrodkową: $\frac{mv_1^2}{l} = \frac{m\mathrm{g}\sqrt{2}}{2} - R_1$. W kierunku poziomym kulka porusza się ze stałą prędkością $\frac{v}{2}$, bo przebywa drogę dwukrotnie mniejszą niż koniec pręta B. Zatem przyspieszenie kulki oraz wypadkowa siła reakcji mają kierunek pionowy. Wartość siły reakcji wynosi: $R = R_1\sqrt{2} = m\left(\mathrm{g} - \frac{v^2\sqrt{2}}{2l}\right)$. Gdy $v^2 < \sqrt{2}\,\mathrm{g}l$, siła ta zwrócona jest do góry.



Rys. 4

583. Podczas spadania zmienia się strumień pola magnetycznego przez powierzchnię pierścienia i powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\right| = \pi l^2 B_0 \alpha v$. Energia potencjalna ciężkości zamienia się na ciepło wydzielone w pierścieniu oraz energię kinetyczną pierścienia: $m\mathrm{g}\Delta x = \frac{\mathcal{E}^2\Delta t}{R} + \frac{m\Delta v^2}{2}$. Dla małych przedziałów czasowych Δt mamy: $m\mathrm{g}v = \frac{\mathcal{E}^2}{R} + mva$, gdzie a jest przyspieszeniem pierścienia. Równanie ruchu pierścienia ma postać: $ma = m\mathrm{g} - F$, gdzie $F = \frac{\pi^2 l^4 B_0^2 \alpha^2 v}{R}$ jest szukaną siłą hamującą. Jakie jest pochodzenie tej siły? Siła elektrodynamiczna, działająca na pierścień w polu magnetycznym o liniach pionowych, działa w płaszczyźnie pierścienia i nie wpływa na jego ruch. Jednak w sytuacji opisanej w zadaniu pole magnetyczne musi mieć składową leżącą w płaszczyźnie pierścienia i prostopadłą do pierścienia. W przeciwnym przypadku strumień pola magnetycznego przez powierzchnię walcową o osi pionowej byłby różny od zera. Ponieważ płaszczyzna pierścienia pozostaje pionowa, pole musi być symetryczne względem osi pierścienia. Zgodnie z prawem Gaussa $\pi l^2 B_0 \alpha \Delta x = 2\pi l B_1 \Delta x$, gdzie B_1 jest poziomą składową pola magnetycznego, prostopadłą do pierścienia. Siła elektrodynamiczna hamująca pierścień to $F = \frac{2\pi l B_1 \mathcal{E}}{R}$. Ten sam wynik otrzymamy, traktując pierścień z prądem jako dipol o momencie magnetycznym $\mu = \frac{\pi l^2 \mathcal{E}}{R} = q_m \Delta x$, gdzie q_m jest ładunkiem magnetycznym dipola. Siła hamująca wynosi $F = q_m B_0 \alpha \Delta x$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2015

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 683 ($WT = 2{,}48$) i 684 ($WT = 1{,}67$) z numeru 6/2014

Jerzy Cisło	Wrocław	43,59
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,14
Michał Miodek	Zawiercie	40,49
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Wojciech Tobiś	Praszka	34,67
Piotr Kumor	Olsztyn	33,09
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Zadania z matematyki nr 693, 694

Redaguje Marcin E. KUCZMA

693. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste niewymierne x, dla których każda z liczb $x^2 - 44x$ oraz $x^3 - 2015x$ jest wymierna.

694. Niech $a(n)$ oznacza odległość liczby naturalnej n od najbliższej liczby, będącej pełnym kwadratem: $a(n) = \min\{|n-k^2| : k \in \mathbb{N}\}$, i niech $S(n) = a(1) + \ldots + a(n)$ oraz $f(n) = \frac{1}{n}S(n)$. Udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita występuje w ciągu $f(1), f(2), f(3), \ldots$ dokładnie trzykrotnie.

Zadanie 694 zaproponował pan Przemysław Grabowski z Goworowa

Rozwiązania zadań z numeru 9/2014

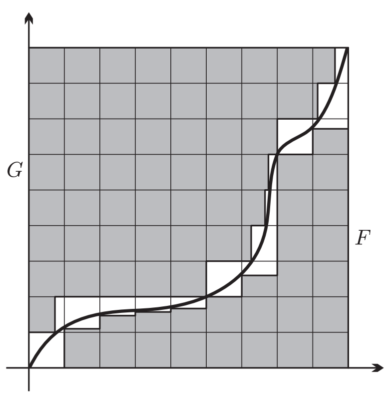
Przypominamy treść zadań:

685. Niech $I = \langle 0;1\rangle$. Funkcje $f, g : I \to I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y, różnych od zera.

685. Z podanych warunków wynika od razu, że f jest różnowartościowym odwzorowaniem przedziału I na cały ten sam przedział. Ma więc funkcję odwrotną; a skoro $f(g(x)) = x$, zatem funkcja g jest tą odwrotną do f. (Łatwo uzasadnić ciągłość obu funkcji – ale ta wiedza nie będzie tu potrzebna).



Dalszy ciąg rozumowania to starogreckie „patrz(!)". Rysunek przedstawia wykres (przykładowej) funkcji f, leżący w kwadracie K, którego dwoma bokami są odcinki $\langle 0;1\rangle$ na poziomej i pionowej osi układu współrzędnych. *Ta sama krzywa* jest też wykresem funkcji g, gdy przyjmiemy, że (rozważając g) odkładamy zmienną niezależną na osi pionowej, a zależną na poziomej.

Niech F będzie wielokątem powstałym z połączenia $n-1$ prostokątów, których podstawami są odcinki $\left\langle \frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right\rangle$ osi poziomej ($k = 1, \ldots, n-1$), a wysokości wynoszą kolejno $f\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Analogicznie tworzymy wielokąt G, rozważając funkcję g i zamieniając role osi współrzędnych.

Wielokąty F i G są (prawie) rozłączne – mogą mieć wspólne jedynie niektóre wierzchołki. Uzasadnienie: jeśli punkt (a, b) należy do F, to znaczy, że dla pewnego k zachodzą nierówności $\frac{k}{n} \leqslant a \leqslant \frac{k+1}{n}$, $b \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$; jeżeli ten sam punkt należy do G, to dla pewnego l mamy $\frac{l}{n} \leqslant b \leqslant \frac{l+1}{n}$, $a \leqslant g\left(\frac{l}{n}\right)$; stąd

$$b \leqslant f\left(\tfrac{k}{n}\right) \leqslant f(a) \leqslant f\left(g\left(\tfrac{l}{n}\right)\right) = \tfrac{l}{n} \leqslant b, \quad \text{więc} \quad a = \tfrac{k}{n},\ b = \tfrac{l}{n}.$$

Zauważmy wreszcie, że kwadracik o boku $1/n$, mający wierzchołek w punkcie $(0,0)$, nie ma punktów wspólnych ani z wielokątem F, ani z G. Po jego usunięciu z kwadratu K pozostaje figura o polu $1 - 1/n^2$; figury F i G są w niej zawarte, ale nie wypełniają jej szczelnie, skoro nie mają wspólnych fragmentów boków (poza wierzchołkami).

Pole wielokąta F wynosi $\frac{1}{n}\sum_{k<n} f\left(\frac{k}{n}\right)$; pole G wynosi $\frac{1}{n}\sum_{k<n} g\left(\frac{k}{n}\right)$. Suma tych pól jest mniejsza niż $1 - 1/n^2$. Mnożymy uzyskaną nierówność przez n i mamy tezę zadania.

(Stała $1 - 1/n^2$ jest optymalna; nierówność staje się bliska równości, gdy wykres funkcji f zbliża się do odpowiednio dobranej linii łamanej, utworzonej z odcinków poziomych i pionowych).

686. Postulowaną własność mają na przykład wszystkie liczby postaci $n = 4^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Żadna z nich nie jest sumą dwóch niezerowych kwadratów; przypuśćmy bowiem, że $4^k = x^2 + y^2$ ($xy \neq 0$); liczby x, y nie mogą być obie nieparzyste (bo wówczas $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$); muszą więc być parzyste, co daje przedstawienie liczby 4^{k-1} w postaci sumy dwóch niezerowych kwadratów. Dalsze zstępowanie prowadzi do konkluzji, że 4 jest sumą dwóch niezerowych kwadratów – a to absurd.

Natomiast niezerowe wymierne rozwiązanie równania $x^2 + y^2 = 4^k$ łatwo uzyskamy, biorąc dowolną trójkę pitagorejską liczb naturalnych a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) i przyjmując $x = 2^k a/c$, $y = 2^k b/c$.

Rozwiązanie zadania M 1445.
Gdyby było $f(x) > 1$ dla pewnego x, to wstawiając $y = \dfrac{x}{f(x)-1}$, mielibyśmy

$$f(x)\cdot f\left(\frac{x \cdot f(x)}{f(x)-1}\right) = f\left(x \cdot \frac{f(x)}{f(x)-1}\right),$$

skąd $f(x) = 1$ – sprzeczność. Zatem $f(x) \leqslant 1$ dla każdego x, więc

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y \cdot f(x)) \leqslant f(x),$$

co oznacza, że f jest nierosnąca.