Gdzie *tam* znaczy też *z powrotem*

Każda ptaszyna swym własnym głosem Pana Boga chwali.

Tym przysłowiem odpowiedziałem podczas obrony pracy doktorskiej na pytanie Profesora Andrzeja Mostowskiego, czemu zbudowałem aksjomatykę geometrii eliptycznej, podczas gdy można tę geometrię uprawiać analitycznie (czyli rachunkowo). A przypomniałem to sobie z okazji pytania, jakie przyszło mi do głowy właśnie na rachunkowym gruncie: jakie funkcje wymierne (poza tożsamością) są odwrotne same do siebie? Gdy przyszło, to ponieważ nie czuję się w środowisku algebraicznym u siebie, zadałem je Wybitnym Algebraikom. Wbrew moim oczekiwaniom odpowiedź nie wskazała tylko funkcji $-x$, $1/x$ i $-1/x$, lecz dwie szerokie klasy

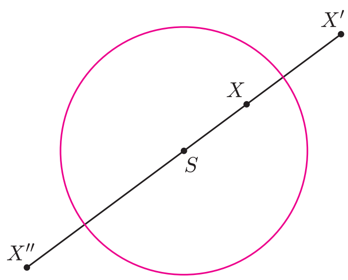
$$\frac{c}{x} \quad \text{dla } c \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{x+a}{bx-1} \quad \text{dla } ab+1 \neq 0.$$

Natychmiast wobec tego zamieściłem w *Delcie* notkę, dzieląc się tą informacją z Czytelnikami (bo skoro ja nie wiedziałem, to zapewne nie wszyscy Czytelnicy o tym wiedzą) – jest w numerze 10/2010.

Ale pozostawało pytanie, dlaczego tak jest. Bo sprawdzenie, że to prawda, na pytanie *dlaczego?* nie odpowiada. I choć do dziś nie wiem, jak tę odpowiedź uzyskują algebraicy, gdy przetłumaczyłem problem na swój język, czyli geometrię, wszystko stało się zrozumiałe.

Przecież w geometrii funkcje odwrote same do siebie (uczenie: *inwolucje*) to symetrie. Liczby zaś tworzą (już w podstawówce) prostą, zwaną osią, gdy nada się jej orientację. A *symetrie na prostej to symetrie środkowe* – jak łatwo zauważyć, symetria względem p dana jest rachunkowym wzorem $2p - x$, bo środek punktów $2p - x$ i x, czyli ich średnia arytmetyczna, to p. Mieści się to wśród przytoczonych funkcji ($a = -2p$, $b = 0$), ale ich nie wyczerpuje.

Wypada spojrzeć szerzej, czyli umieścić oś liczbową na płaszczyźnie. Na płaszczyźnie zachowują tę oś również symetrie względem prostopadłych do niej prostych – ale one nic nowego nie wnoszą: ograniczone do osi liczbowej są symetriami środkowymi. Są jednak i *inne symetrie*: *inwersje* (symetrie względem okręgów) i *antyinwersje* – jeśli środek okręgu umieścimy na osi liczbowej, również one dostarczą nam poszukiwanych inwolucji. Sprawdźmy.



Na płaszczyźnie inwersja względem okręgu o środku S i promieniu r to przekształcenie, które punktowi X przyporządkowuje taki punkt X', leżący na prostej SX, że

$$\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX}' = r^2.$$

Z kolei antyinwersja przyporządkowuje punktowi X taki punkt X'', leżący na prostej SX, że

$$\overrightarrow{SX} \cdot \overrightarrow{SX}'' = -r^2.$$

Jak łatwo zauważyć, i inwersje, i antyinwersje są inwolucjami (czyli są odwrotne do samych siebie).

Zarówno inwersje, jak antyinwersje mogą być zdefiniowane w dowolnym (naturalnym) wymiarze dokładnie w ten sam sposób – rolę okręgu przejmują wtedy sfery (powierzchnie kuli) odpowiedniego wymiaru.

O inwersjach pisaliśmy ostatnio w *Delcie* 7/2014.

Zgodnie z przypomnianą na marginesie definicją inwersja względem okręgu o środku p i promieniu $r > 0$ przekształca na osi punkt x na taki punkt x', że

$$(x-p)\cdot(x'-p) = r^2, \quad \text{czyli} \quad x' = \frac{r^2}{x-p} + p = \frac{px + (r^2 - p^2)}{x-p}.$$

Zauważmy, że uzyskane tym sposobem funkcje prawie wyczerpują obie wymienione na początku klasy funkcji: podstawiając $p = 0$, uzyskujemy wszystkie funkcje pierwszej z klas dla $c = r^2 > 0$, a dzieląc przez p w pozostałych przypadkach – wszystkie funkcje drugiej z klas dla $ab + 1 = (r^2/p^2) > 0$. Pozostałe funkcje uzyskujemy z antyinwersji, bo dla niej

$$(x-p)\cdot(x'-p) = -r^2.$$

Wystarczyło, że przetłumaczyłem sobie algebrę na geometrię i wszystko stało się dla mnie jasne.

* * *

Ogólny morał z tego taki, że każdy problem, nie tylko matematyczny, należy sobie przetłumaczyć na język nam bliski, a wtedy wiele trudności zniknie.

Ba, mało: pojawi się wiele kwestii w mało używanej przez nas terminologii ukrywających się przed nami. W tym przypadku np. fakt, iż skoro jesteśmy na płaszczyźnie, to nie ma powodu, by ograniczać się do prostej – uzyskane wzory będą funkcjonowały dla wszystkich punktów płaszczyzny traktowanych jako liczby zespolone (algebraicy w swoim języku bez problemów widzą, że wzory te odpowiadają na pytanie, jak wyglądają wymierne inwolucje w dowolnym ciele). Możemy jednak pójść dalej: nasze wzory pracują w dowolnym (naturalnym) wymiarze, opisując nam geometrycznie inwolucje – czy znaczy to, że wzory te są poprawne również wśród kwaternionów, realizujących się jako punkty przestrzeni czterowymiarowej? A co znaczą dla innych wymiarów, w których punkty nie tworzą ciał?

I to jest drugi morał: z problemami jest jak z hydrą – gdy utniemy jej jedną głowę, w jej miejsce wyrasta kilka nowych.

Marek KORDOS