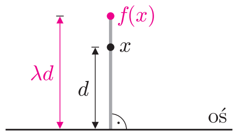
Każdy trójkąt jest równoboczny

Joanna JASZUŃSKA

Przekształcenie afiniczne płaszczyzny to takie różnowartościowe przekształcenie płaszczyzny w siebie, przy którym obrazem każdej prostej jest prosta. Wszystkie podobieństwa spełniają te warunki, ale nie tylko one (więcej na marginesie). Niektóre własności przekształceń afinicznych:

Każde przekształcenie afiniczne jest złożeniem pewnego podobieństwa i pewnego *powinowactwa prostokątnego* o skali $\lambda \geqslant 1$. Takie powinowactwo f każdy punkt X odsuwa λ razy dalej od pewnej ustalonej prostej (*osi*):



(a) Zachowują: równoległość prostych, stosunek długości odcinków równoległych, stosunek pól.
(b) Są odwracalne i przekształcenia odwrotne do nich również są afiniczne.
(c) Każdy trójkąt można przeprowadzić afinicznie na dowolny inny; co więcej, obrazy wierzchołków trójkąta jednoznacznie definiują przekształcenie afiniczne.

Wynika z tego, że dowolny równoległobok można przekształcić afinicznie na dowolny inny (wystarczy przekształcić trzy jego wierzchołki, obraz czwartego zadany jest jednoznacznie przez równoległości podstaw).

(d) Każdą elipsę można przekształcić na okrąg, zatem też na dowolną inną elipsę.

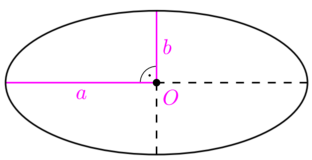
Zamiast więc rozważać dany trójkąt, równoległobok czy elipsę, często wystarczy rozważyć odpowiednio trójkąt równoboczny, kwadrat lub okrąg, o ile inne interesujące nas własności są niezmiennikami przekształceń afinicznych (punkt (a)).

1. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie i dzielą w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka.

2. Wykaż, że w każdym trapezie o nierównoległych ramionach punkt przecięcia ich przedłużeń, punkt przecięcia przekątnych i środki podstaw leżą na jednej prostej.

3. Wykaż, że jeżeli punkt O jest środkiem elipsy wpisanej w czworokąt $ABCD$, to $[OAB]+[OCD]=[OBC]+[ODA]$, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

4. Wyznacz pole elipsy, znając długości jej półosi (rys. 1).



Rys. 1. a – duża półoś, b – mała półoś.

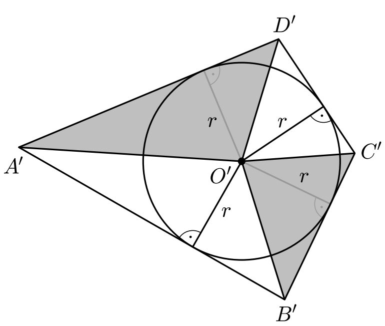
5. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MD}$. Proste b, c, d przechodzą odpowiednio przez punkty B, C, D oraz są równoległe odpowiednio do prostych KL, KM, LM. Udowodnij, że proste b, c, d przecinają się w jednym punkcie.

6. Każda z przekątnych czworokąta wypukłego dzieli go na trójkąty o równych polach. Wykaż, że ten czworokąt jest równoległobokiem.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Trójkąt równoboczny ma żądane własności. Dowolny inny trójkąt jest jego obrazem przy pewnym przekształceniu afinicznym, które zachowuje środki boków, a więc także środkowe, ich współpękowość oraz stosunek podziału. □

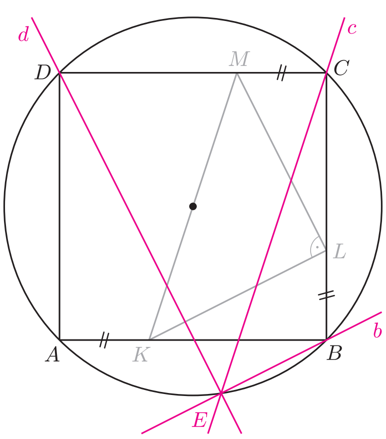
R3. Przeprowadźmy daną elipsę afinicznie na okrąg o promieniu r, obrazem punktu O jest środek okręgu O' (rys. 2). Czworokąt $A'B'C'D'$ jest opisany na okręgu, zachodzi więc równość $A'B'+C'D'=B'C'+D'A'$. Mnożąc obie strony przez $r/2$, uzyskujemy tezę dla okręgu. Przekształcenia afiniczne zachowują równość pól, zatem teza zachodzi także dla wyjściowej elipsy. □



Rys. 2. X' oznacza obraz punktu X.

R4. Opiszmy na elipsie prostokąt o bokach długości $2a$ i $2b$, równoległych do jej półosi. Powinowactwo prostokątne o skali a/b i o osi zawierającej dużą półoś elipsy przekształca nasz prostokąt na kwadrat, a elipsę na koło weń wpisane. Stąd stosunek pola P elipsy do pola $4ab$ prostokąta równy jest stosunkowi pola koła do pola kwadratu na nim opisanego, czyli $\pi/4$. Wobec tego $P=\pi ab$. □

R5. W myśl uwagi poprzedzającej zadania, wystarczy rozważyć kwadrat (rys. 3). Odcinek LM powstaje z odcinka KL przez obrót o 90° wokół środka kwadratu, zatem $KL \perp LM$, więc także $b \perp d$. Stąd punkt E przecięcia prostych b i d leży na okręgu opisanym na kwadracie. Ponadto skoro $DE \parallel LM$, to punkt E musi należeć do tego łuku AC okręgu, który zawiera B. Wobec tego $\sphericalangle CED = \sphericalangle CBD = 45^\circ = \sphericalangle KML$. Na mocy $DE \parallel LM$ wynika stąd, iż $CE \parallel KM$, czyli $CE = c$. Zatem proste b, c, d przecinają się w jednym punkcie E. □



Rys. 3. $AK = BL = CM$.

Literatura

J. Bednarczuk, *Urok przekształceń afinicznych*, WSiP, 1978.