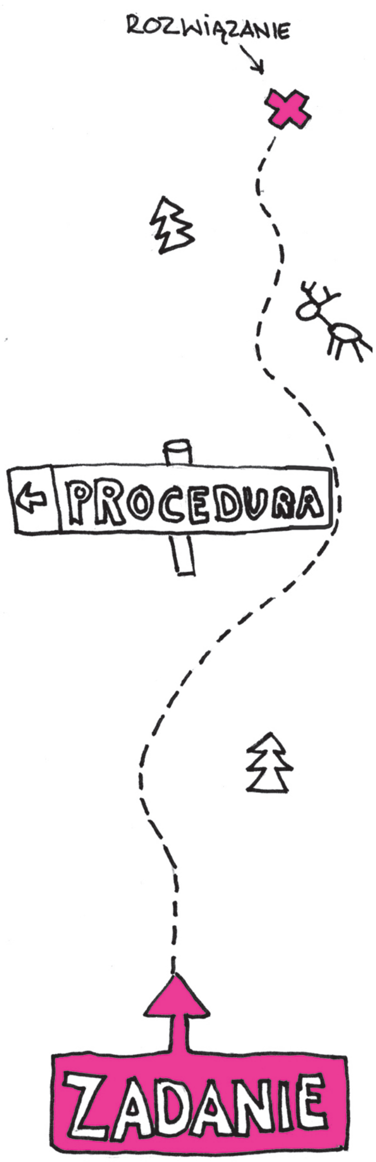
Zadania z indywidualnością

Wiktor BARTOL

Matematyka, zwłaszcza tzw. szkolna, wypracowała przez lata procedury rozwiązywania określonego typu zadań. Gdy rozpoznajemy problem jako równanie kwadratowe, w głowie pojawia się hasło „bekwadratminusczteryace” i już wszystko wiadomo, niezależnie od tego, jak w rzeczywistości nazwaliśmy współczynniki funkcji kwadratowej. Kiedy widzimy wartość bezwzględną wyrażenia, w pierwszym odruchu rozbijamy zadanie na przypadki: gdy wyrażenie jest dodatnie i gdy jest ujemne. Pierwiastek kwadratowy w równaniu skłania do podniesienia obu stron do kwadratu, by jak najszybciej się owego pierwiastka pozbyć. A przecież wiele zadań ma specyficzną konstrukcję, własną indywidualność, która często pozwala stosować prostsze lub bardziej eleganckie metody rozwiązania. Czyż do rozwiązania równania $x^2 - 4 = 0$ trzeba się odwoływać do wyróżnika funkcji kwadratowej?



Nie zawsze warto poddawać się pierwszym odruchom. Rozwiązanie omijające ogólną procedurę, wykorzystujące szczególne cechy konkretnej sytuacji matematycznej, daje satysfakcję nie tylko autorowi, ale także czytelnikom tego rozwiązania, otwiera umysły i zachęca do poszukiwania własnych dróg. Nawet jeśli nietypowe rozwiązanie nie jest krótsze od rozwiązania wynikającego z procedur, warto je pokazywać. Poniżej parę przykładów rozwiązań standardowych (przez co będziemy rozumieli rozwiązania „pierwszego odruchu”) i niestandardowych (wynikających z niepoddania się odruchom). Klasyfikacja rozwiązań do jednej lub drugiej kategorii jest, rzecz jasna, subiektywna – różni ludzie miewają różne odruchy – ale ułatwia ujawnienie tego, co określiliśmy jako indywidualność zadania. Niemal wszystkie przykłady, zarówno standardowe, jak i niestandardowe, pochodzą z rzeczywistych prac uczniów licealnych.

Zadanie 1. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej f danej wzorem $f(x) = x^2 - 2x + 10$.

Rozwiązanie standardowe: Proste, mamy przecież wzór na najmniejszą wartość funkcji kwadratowej (gdy takowa wartość istnieje): to „minus delta przez cztery a”, więc obliczamy „deltę”, dopisujemy minus, dzielimy przez 4 i otrzymujemy najmniejszą wartość równą 9.

Rozwiązanie niestandardowe: $x^2 - 2x + 10 = (x-1)^2 + 9$, zatem najmniejszą wartość funkcja f osiąga wtedy, gdy $(x-1)^2 = 0$ i jest ona równa 9.

Komentarz: Indywidualność tego zadania, jak widać, polega na tym, że – wbrew pozorom – nie wymaga ono teorii funkcji kwadratowej; wystarczą wzory skróconego mnożenia (można nawet nie wiedzieć o postaci kanonicznej takiej funkcji).

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $x^2 - 2x + |x-1| - 1 = 0$.

Rozwiązanie standardowe: Nie ma się nad czym zastanawiać: rozpatrujemy dwa przypadki: $x < 1$ oraz $x \geqslant 1$. W pierwszym otrzymujemy równanie $x^2 - 3x = 0$, które ma tylko jedno rozwiązanie wśród liczb mniejszych od 1, mianowicie 0, w drugim – równanie $x^2 - x - 2 = 0$, które rozwiązujemy jak każde porządne równanie kwadratowe, wybieramy rozwiązanie nie mniejsze od 1, czyli 2.

Rozwiązanie niestandardowe: Może jednak chwilę się zastanówmy. Rozszerzmy nieco równanie:

$$x^2 - 2x + |x-1| - 1 = (x^2 - 2x + 1) + |x-1| - 2 = |x-1|^2 + |x-1| - 2.$$

Niech $t = |x-1|$. Rozwiązujemy równanie $t^2 + t - 2 = 0$ i otrzymujemy $t = -2$ lub $t = 1$. Pierwsze rozwiązanie odpada ($t \geqslant 0$), zatem $t = |x-1| = 1$, a stąd $x = 0$ lub $x = 2$.

Komentarz: Miła okoliczność – współczynniki pozwalają zastosować wzór skróconego mnożenia tak, że wszystko ładnie się zwija.

Zadanie 3. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y, że $\frac{x}{x+y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Oblicz $\frac{y}{x+y}$.

Rozwiązanie standardowe: Idąc za odruchem przekształcania, sprowadzamy równanie do postaci $2x = \sqrt{2}(x+y)$, skąd otrzymujemy $y = (\sqrt{2}-1)x$ i podstawiamy: $\frac{y}{x+y} = \frac{(\sqrt{2}-1)x}{x+y} = (\sqrt{2}-1)\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie niestandardowe: Oczywiście $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1$, zatem $\frac{y}{x+y} = 1 - \frac{x}{x+y} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Komentarz: Wniosek – nie należy przystępować do obliczeń z zamkniętymi oczami. Warto dobrze przyjrzeć się zadaniu, by dostrzec jego niezbyt głęboko ukrytą strukturę.

Zadanie 4. Niech f będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych o stopniu co najmniej 1. Wykaż, że jeśli c i d są różnymi liczbami całkowitymi, to $c-d$ dzieli $f(c)-f(d)$.

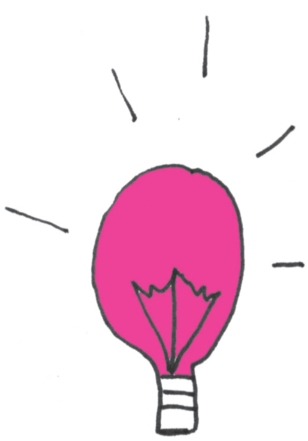
Rozwiązanie standardowe: Musimy przecież wiedzieć, jak wielomian wygląda, więc niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Wówczas $f(c) - f(d) = a_n(c^n - d^n) + a_{n-1}(c^{n-1} - d^{n-1}) + \ldots + a_1(c-d)$. Ze wzorów skróconego mnożenia wynika, że każdy składnik sumy jest podzielny przez $c-d$, zatem suma $f(c)-f(d)$ jest także podzielna przez $c-d$.

Rozwiązanie niestandardowe: Z twierdzenia o dzieleniu wielomianów z resztą oraz z twierdzenia Bézout wynika, że mamy $f(x) = q(x)(x-d) + f(d)$ dla pewnego wielomianu q (którego współczynniki także są całkowite). Stąd $f(c) = q(c)(c-d) + f(d)$, czyli $f(c) - f(d) = q(c)(c-d)$, gdzie $q(c)$ jest liczbą całkowitą.

Komentarz: Trudno uznać rozwiązanie standardowe za szczególnie skomplikowane, ale o ileż ładniejsze jest to drugie rozwiązanie, odwołujące się do twierdzeń o podzielności wielomianów. A przy tym wymaga mniej znaczków.

Zadanie 5. Zbadaj, czy istnieje taki wielomian f stopnia 3 o współczynnikach całkowitych, że $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ oraz $f(3) = 0$.

Rozwiązanie standardowe: Niech $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ będzie wielomianem przyjmującym zadane wartości. Podstawiamy je i widzimy, że $d = 1$, a pozostałe współczynniki są związane układem równań:



$$\begin{cases} a + b + c + 1 = 2, \\ 8a + 4b + 2c + 1 = 3, \\ 27a + 9b + 3c + 1 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ (dowolną poprawną metodą) i okazuje się, że wartości współczynników nie są całkowite. Tak więc taki wielomian f o współczynnikach całkowitych nie istnieje.

Rozwiązanie niestandardowe 1: Z warunków zadania wynika, że jeśli f jest takim wielomianem, to $f(3) - f(0) = 27a + 9b + 3c = -1$. Obie strony drugiej równości są liczbami całkowitymi, jednak lewa strona jest podzielna przez 3, prawa nie. Sprzeczność.

Rozwiązanie niestandardowe 2: Z warunków zadania wynika, że wyraz wolny domniemanego wielomianu f ma być równy 1, a 3 ma być pierwiastkiem (całkowitym) tego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Stąd liczba 3 powinna być dzielnikiem wyrazu wolnego – a nie jest.

Komentarz: Rzucając się do obliczeń, przegapiamy fakt, że niektóre informacje w zadaniu są zbędne. Po co wiedzieć, że $f(1) = 2$ i $f(2) = 3$? Rozwiązania niestandardowe nie zajmują się układem równań; kluczem do dowodu jest podzielność.

Zadanie 6. Niech $f(x) = x^2 - x + 1$. Znajdź wszystkie wartości x, dla których $f(f(x)) = f(x)$.

Rozwiązanie standardowe: Po podstawieniu otrzymujemy równanie $(x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x + 1) + 1 = x^2 - x + 1$, co po przekształceniach prowadzi do równania $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = 0$, co daje $x = 0$ lub $x = 1$.

Rozwiązanie niestandardowe 1: Dla jakich wartości a zachodzi równość $f(a) = a$? Sprawdzamy: $a^2 - a + 1 = a$, gdy $a = 1$. Pozostaje sprawdzić, dla jakich wartości x mamy $f(x) = 1$: $x^2 - x + 1 = 1$, gdy $x^2 - x = 0$, a więc gdy $x = 0$ lub $x = 1$.

Rozwiązanie niestandardowe 2: Jeśli funkcja kwadratowa przyjmuje tę samą wartość w punktach a i b, to punkty te muszą być położone na osi x symetrycznie względem osi symetrii wykresu funkcji. Dla funkcji f osią symetrii jest prosta $x = \frac{1}{2}$, zatem z warunku $f(f(x)) = f(x)$ wynika, że $x = \frac{1}{2} - c$ i $f(x) = \frac{1}{2} + c$ dla pewnego c. Stąd dochodzimy do równania

$$f(f(x)) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + c\right) + 1 = \frac{1}{2} + c = f(x),$$

z którego otrzymujemy $c = \frac{1}{2}$. W konsekwencji $x = 1$, a z symetrii sytuacji mamy drugie rozwiązanie: $c = -\frac{1}{2}$ oraz $x = 0$.

Komentarz: Rozwiązanie standardowe jest dość proste, ale pierwsze rozwiązanie niestandardowe, choć ideowo dość podobne, wydaje się bardziej przejrzyste, prostsze są równania, jakie trzeba rozwiązać. Drugie rozwiązanie niestandardowe utraciło co prawda zaletę prostoty, ale opiera się na innej własności funkcji kwadratowej.

* * *

Na koniec przykład niestandardowego dowodu, który nie pochodzi z prac uczniowskich (można go odnaleźć w sieci), ale ma pewną cechę, z powodu której warto go przytoczyć. To dowód faktu, że

dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ liczba $\sqrt[n]{2}$ jest liczbą niewymierną.

Przypuśćmy, że $n > 2$ i istnieją liczby całkowite a i b względnie pierwsze takie, że $\sqrt[n]{2} = \frac{a}{b}$. Wtedy $2b^n = a^n$, czyli $b^n + b^n = a^n$. A to stoi w jawnej sprzeczności z Wielkim Twierdzeniem Fermata: dla $n > 2$ równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych!

Jakaż to cecha powoduje, że warto zobaczyć ten dowód? Trudno go określić jako prostszy od dowodu standardowego, opierającego się na własnościach podzielności, gdyż zawiera potężne narzędzie, zbudowane przez Pierre'a de Fermata i Andrew Wilesa, daleko wykraczające poza to, co moglibyśmy nazwać prawem dowodu do obrony własnej. Z tego samego powodu trudno też uznać go za elegancki. Otóż jest on po prostu... zabawny!

W matematyce zdanie staje się twierdzeniem, gdy zostaje wsparte dowodem. Nierzadkie są jednak przypadki, gdy po udowodnieniu twierdzenia zaczynają pojawiać się publikacje proponujące inny jego dowód. Dlaczego dowodzi się czegoś, co już zostało udowodnione? Po pierwsze dlatego, że nieustannie trwa poszukiwanie dowodów prostych i ładnych. Po drugie zaś dlatego, że nowy dowód często odwołuje się do zupełnie innych własności matematycznych niż poprzednie, co pozwala zobaczyć samo twierdzenie pod innym kątem i lepiej zrozumieć jego miejsce wśród innych. Co widać na podanych wyżej prostych przykładach.