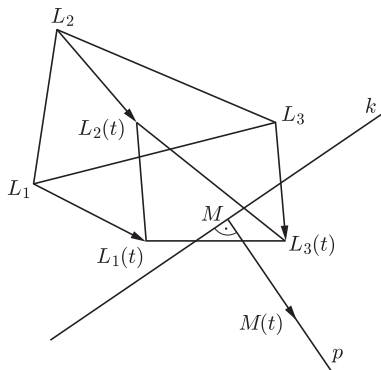


# Na łowy!

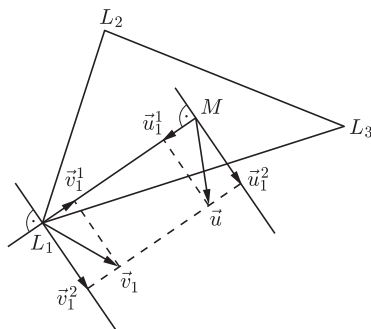
Jarosław GÓRNICKI\*

\*Katedra Matematyki,  
Politechnika Rzeszowska

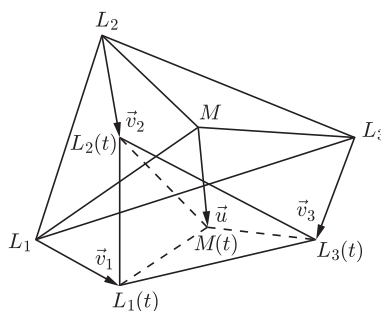
Podobny problem był rozważany w artykule J. Górnickiego *Lew i człowiek* w *Delcie* 2/2013. Wtedy myśliwy był w trochę lepszej sytuacji, ponieważ gonił go tylko jeden lew.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Lemat 1 jest prawdziwy dla dowolnego wielokąta wypukłego.

## Epizod 1

Stado lwic  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , gdzie  $n \geq 3$ , oraz myśliwy  $M$  (rozważani jako punkty płaszczyzny euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy myśliwy ma skuteczną strategię ucieczki przed grupą lwic? Kiedy lwice mają skuteczną strategię pochycenia myśliwego w skończonym czasie?

Oznaczmy przez  $L_j(t), M(t)$  położenia „uczestników” polowania w czasie  $t \geq 0$  i niech  $\text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$  oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający wszystkie punkty  $L_j(0), j = 1, 2, \dots, n$ .

**Twierdzenie 1.** *Jeżeli  $M = M(0)$  nie jest punktem wewnętrznym zbioru  $C = \text{conv}\{L_1(0), L_2(0), \dots, L_n(0)\}$  i  $M \neq L_j$  dla każdego  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to istnieje strategia pozwalająca myśliwemu na ucieczkę przed każdą lwicą  $L_j$ .*

**Dowód.** W opisanej sytuacji istnieje taka prosta  $k$  przechodząca przez punkt  $M$ , że zbiór  $C$  leży w jednej półpłaszczyźnie (domkniętej) ograniczonej prostą  $k$ . Niech  $p$  będzie półprostą o początku w punkcie  $M$  prostopadłą do prostej  $k$ , leżącą w półpłaszczyźnie niezawierającej zbioru  $C$  (rys. 1). Wówczas Czytelnik Wnikliwy łatwo sprawdzi, że myśliwy może uciec przed wszystkimi lwicami, poruszając się z maksymalną prędkością wzdłuż półprostej  $p$ . □

Ale może się zdarzyć, że myśliwy wpadnie w pułapkę zastawioną przez lwice...

**Twierdzenie 2.** *Jeżeli  $M = M(0)$  jest punktem wewnętrznym trójkąta  $L_1(0)L_2(0)L_3(0)$ , to istnieje strategia gwarantująca tym trzem lwicom pochycenie myśliwego w skończonym czasie.*

**Dowód.** Opracowując strategię polowania dla lwic, będziemy żądali, by:

- lwice natychmiast reagowały na zmiany kierunku ucieczki myśliwego,
- w każdej chwili  $t$  myśliwy należał do wnętrza obszaru wyznaczonego przez aktualne pozycje lwic,
- odległość myśliwego od każdej lwicy nie powiększała się,
- lwice nie potrzebowały zewnętrznego koordynatora ani nie traciły czasu na wymianę informacji z otoczeniem.

Uwzględniając te wymagania, wskażemy kierunek pogoni każdej lwicy  $L_j$  w zależności od kierunku ucieczki myśliwego.

Założmy, że myśliwy  $M$  ucieka z prędkością wskazaną przez wektor  $\vec{u}$ , a każda lwica  $L_j$  ściga go z prędkością wskazaną przez wektor  $\vec{v}_j$ , taką, że  $|\vec{v}_j| = |\vec{u}|$  (gdzie  $|\vec{u}|$  oznacza długość wektora  $\vec{u}$ ), ponieważ wszyscy poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami (rys. 2). Wyznamy teraz wektor prędkości  $\vec{v}_j$ . Niech  $\vec{u}_j^1$  będzie rzutem prostopadłym wektora  $\vec{u}$  na prostą  $L_jM$ , a  $\vec{u}_j^2$  będzie rzutem prostopadłym wektora  $\vec{u}$  na prostą prostopadłą do prostej  $L_jM$  wystawioną w punkcie  $M$ . Następnie w punkcie  $L_j$  zaczepiamy wektory składowe:  $\vec{v}_j^2$ , taki, że  $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$  i wektor  $\vec{v}_j^1$  o zwrocie w kierunku punktu  $M$ , taki, że  $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$ . Wówczas wektor  $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$  wskazuje prędkość poruszania się lwicy  $L_j$ .

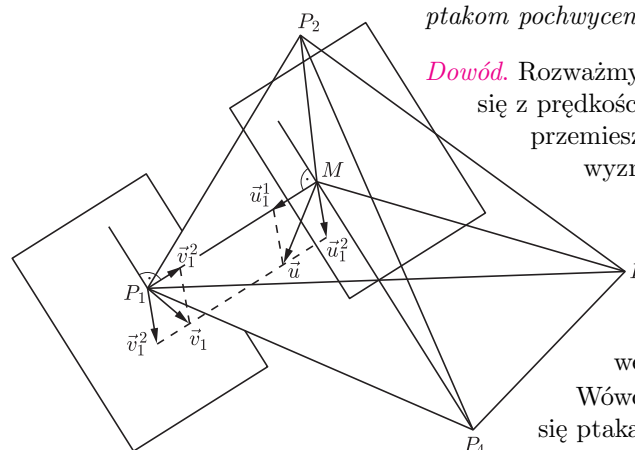
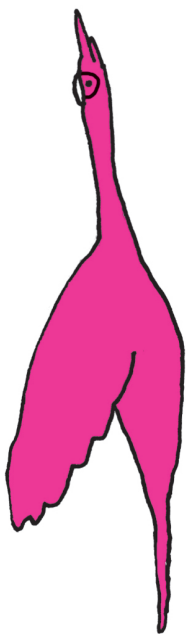
Po upływie czasu  $t > 0$  położenia uczestników polowania ilustruje rysunek 3. Z przedstawionej konstrukcji wynika, że  $L_jM \parallel L_j(t)M(t)$  dla  $j = 1, 2, 3$ , więc punkt  $M(t)$  jest punktem wewnętrznym zbioru  $\text{conv}\{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$ . Ponadto odległość między punktami  $M(t)$  a  $L_j(t)$  nie wzrosła.

Ostatnią obserwację można istotnie wzmocnić, korzystając z następującego lematu.

**Lemat 1.** *Jeżeli  $M$  jest punktem wewnętrznym trójkąta  $L_1L_2L_3$ , to istnieje taki kąt ostry  $\gamma$ , że dla pewnego  $j_0, |\angle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \gamma$ , gdzie  $\vec{a}_j = \overrightarrow{ML_j}, j = 1, 2, 3$ .*



Przedstawioną strategię polowania lwice może wykorzystać grupa  $n \geq 3$  okrętów do przechwycenia okrętu wroga na oceanie. Przechwycenie nastąpi szybciej, gdy prędkość okrętów pościgowych będzie większa niż prędkość okrętu uciekającego.



Rys. 4

**Dowód lematu.** Półproste o początku w punkcie  $M$  zgodne z wektorami  $\vec{a}_j$  rozcinają płaszczyznę na trzy kąty o mierze mniejszej niż  $\pi$ . Jeżeli największy z nich ma miarę  $\beta$ , to  $\gamma = \frac{\beta}{2}$  spełnia warunki lematu.  $\square$

Co stąd wynika? Zauważmy, że w każdym momencie trwania pościgu układ wektorów  $\vec{a}_j = \overrightarrow{M(t)L_j(t)}$  pozostaje względem siebie niezmienny. Gwarantuje to, że w każdym momencie pościgu istnieje taki wektor  $\vec{a}_j$ , że  $|\angle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \gamma$ , gdzie  $\gamma$  jest kątem z lematu 1. Ponieważ

$$|\vec{v}_j^2| = |\vec{u}_j^2| \leq |\vec{u}| \cdot \sin \gamma,$$

więc

$$|\vec{v}_j^1| = \sqrt{|\vec{v}_j|^2 - |\vec{v}_j^2|^2} \geq \sqrt{|\vec{u}|^2 - (|\vec{u}| \cdot \sin \gamma)^2} = |\vec{u}| \cdot \cos \gamma.$$

Skoro wektor  $\vec{v}_j^1$  jest skierowany w stronę punktu  $M$ , a wektor  $\vec{u}_j^1$  jest skierowany do punktu  $L_j$ , więc odległość między punktami  $M$  i  $L_j$  maleje z prędkością nie mniejszą niż  $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$ . Oznacza to, że suma odległości  $|ML_1| + |ML_2| + |ML_3|$  maleje z prędkością nie mniejszą niż  $|\vec{u}| \cdot \cos \gamma$ . Stąd wynika, że lwice złapią myśliwego w skończonym czasie, co kończy dowód twierdzenia.  $\square$

**Uwaga.** Sytuacja komplikuje się, gdy grupa polujących lwic zostaje zmniejszona. Może się zdarzyć tak, że wyeliminowanie określonej lwicy daje myśliwemu szansę na skuteczną ucieczkę. Jeśli  $M \notin \overline{\text{conv}}\{L_1, L_2, \dots, L_n\} \setminus \{L_k\}$ , to na mocy twierdzenia 1 myśliwy może uciec po wyeliminowaniu lwicy  $L_k$ . Sytuacja ta wymaga jednak od myśliwego wiedzy na temat wszystkich goniących go lwic w każdej chwili  $t$ , a także zastanowienia – spełnienie tego warunku może być trudne...

## Epizod 2

Stado ptaków  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , gdzie  $n \geq 4$  oraz mucha  $M$  (rozważane jako punkty przestrzeni euklidesowej) poruszają się z równymi maksymalnymi prędkościami. Kiedy mucha ma skuteczną strategię ucieczki przed stadem ptaków? Kiedy ptaki mogą pochwycić muchę w skończonym czasie?

Następującą obserwację możemy uzasadnić, opierając się na tym samym pomysle, co w dowodzie twierdzenia 1.

**Twierdzenie 3.** Jeżeli  $M = M(0)$  nie jest punktem wewnętrznym zbioru  $C = \overline{\text{conv}}\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  i  $M \neq P_j$  dla każdego  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to mucha  $M$  ma skuteczną strategię ucieczki przed każdym ptakiem  $P_j$ .

Dowód kolejnego twierdzenia będzie wymagał więcej pracy.

**Twierdzenie 4.** Jeżeli  $M = M(0)$  jest punktem wewnętrznym czworoboku  $P_{j_1}P_{j_2}P_{j_3}P_{j_4}$ , gdzie  $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , to istnieje strategia gwarantująca ptakom pochwycenie muchy w skończonym czasie.

**Dowód.** Rozważmy czworobok  $P_1P_2P_3P_4$ . Załóżmy, że mucha  $M$  porusza się z prędkością wskazaną przez wektor  $\vec{u}$ . Wówczas ptak  $P_j$  powinien przemieszczać się z prędkością wskazaną przez wektor  $\vec{v}_j$ , który teraz wyznaczymy. Niech  $\vec{u}_j^1$  będzie rzutem prostopadłym wektora  $\vec{u}$  na prostą  $MP_j$ , a  $\vec{u}_j^2$  będzie rzutem prostopadłym wektora  $\vec{u}$  na płaszczyznę przechodzącą przez punkt  $M$  i prostopadłą do prostej  $MP_j$ . Następnie w punkcie  $P_j$  zaczepiamy taki wektor  $\vec{v}_j^2$ , że  $\vec{v}_j^2 = \vec{u}_j^2$  (leży on w płaszczyźnie prostopadłej do prostej  $P_jM$  przechodzącej przez punkt  $P_j$ ) oraz wektor  $\vec{v}_j^1$  o zwrocie w kierunku punktu  $M$ , taki, że  $|\vec{v}_j^1| = |\vec{u}_j^1|$ . Wówczas wektor  $\vec{v}_j = \vec{v}_j^1 + \vec{v}_j^2$  wskazuje prędkość poruszania się ptaka  $P_j$  (rys. 4). Konstrukcja ta (nawet dla liczniejszego stada ptaków) nie powiększa żadnej odległości między muchą  $M$  a ptakiem  $P_j$  oraz nie zmienia wzajemnego położenia wektorów  $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$ .

Lemat 2 jest prawdziwy dla dowolnego wielościanu wypukłego.

Skuteczność tej strategii wynika z następującego lematu.

**Lemat 2.** Jeżeli  $M$  jest punktem wewnętrznym czworościanu  $P_1P_2P_3P_4$ , to istnieje taki kąt ostry  $\beta$ , że dla pewnego  $j_0$ ,  $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{a}_{j_0})| \leq \beta$ , gdzie  $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

**Dowód lematu.** Półproste o początku w punkcie  $M$  zawierające wektory  $\vec{a}_j = \overrightarrow{MP_j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , dzielą przestrzeń na cztery kąty wielościenne (każdy taki kąt wielościenne jest wyznaczony przez trzy kąty płaskie o wspólnym wierzchołku  $M$  generowane przez trzy różne półproste). W każdym wielościanie  $MP_iP_jP_k$ , gdzie  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  i liczby  $i, j, k$  są parami różne, rzutujemy prostopadłe punkt  $M$  na płaszczyznę trójkąta  $P_iP_jP_k$ . Rzut ten oznaczamy przez  $R_h$ , gdzie  $h \in (\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i, j, k\})$ . Wówczas każdy z kątów płaskich  $R_hMP_j$ , gdzie  $j \neq h$  i  $j, h \in \{1, 2, 3, 4\}$ , jest ostry (bo  $M$  jest punktem wewnętrznym czworościanu  $P_1P_2P_3P_4$ ). Niech

$$(1) \quad \max_{j, h \in \{1, 2, 3, 4\}, j \neq h} |\sphericalangle R_hMP_j| = \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Wektor  $\vec{u}$  (prędkości muchy  $M$ ) zawiera się w pewnym kącie trójściennym  $MP_iP_jR_h$ . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że jest to kąt trójścienny  $MP_1P_4R_2$  (rys. 5), w którym zgodnie z opisem prosta  $MR_2$  jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez punkty  $P_1, P_4, R_2$ . Niech prosta zawierająca wektor  $\vec{u}$  przebija powierzchnię trójkąta  $P_1P_4R_2$  w punkcie  $D$ . Wówczas

$$(2) \quad |P_1D| + |DP_4| \leq |P_1R_2| + |R_2P_4|.$$

Rzeczywiście, gdy przedłużenie odcinka  $P_4D$  przecina bok  $P_1R_2$  w punkcie  $E$  (rys. 6), to korzystając z nierówności trójkąta, mamy

$$|P_1D| \leq |P_1E| + |ED| \quad \text{i} \quad |P_4D| + |DE| \leq |ER_2| + |R_2P_4|.$$

Dodajemy te nierówności stronami, a następnie od obu stron nierówności odejmujemy wielkość  $|ED|$  i otrzymujemy (2).

$$(3) \quad |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq |\sphericalangle R_2MP_1| + |\sphericalangle R_2MP_4|.$$

Gdy na płaszczyźnie  $\Pi$  wykreślimy trójkąty  $R_2MP_1, R_2MP_4$  tak, że punkty  $P_1$  i  $P_4$  leżą po różnych stronach prostej  $MR_2$ , rys. 7, to punkty  $P_1, R_2, P_4$  leżą na prostej (bo odcinek  $R_2M$  jest prostopadły do płaszczyzny trójkąta  $P_1R_2P_4$ ). Następnie na płaszczyźnie  $\Pi$  w kącie  $P_1MP_4$  wykreślamy trójkąt  $P_1MF$  podobny do trójkąta  $P_1MD$ , gdzie  $|\sphericalangle P_1MF| = |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})|$  i  $|P_1F| = |P_1D|$  i  $|MF| = |MD| \geq |MR_2|$ , oraz trójkąt  $P_4MG$  podobny do trójkąta  $P_4MD$ , gdzie  $|\sphericalangle P_4MG| = |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})|$  i  $|P_4G| = |P_4D|$  i  $|MG| = |MD| \geq |MR_2|$ , rys. 7.

Wówczas na podstawie nierówności (2) prawdziwa jest nierówność (3).

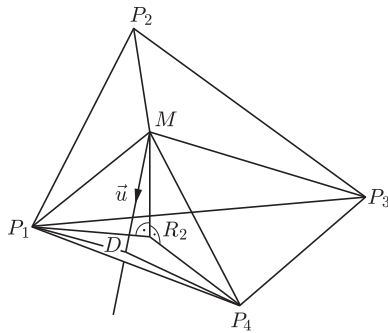
Z nierówności (3) oraz z warunku (1) wynika, że

$$|\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})| + |\sphericalangle(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})| \leq 2\beta,$$

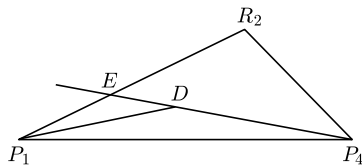
czyli jeden z kątów  $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_1})$  lub  $(\vec{u}, \overrightarrow{MP_4})$  ma miarę nie większą niż  $\beta$ . Oznacza to, że w każdym momencie pościgu istnieje  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , takie, że  $|\sphericalangle(\vec{u}, \vec{a}_j)| \leq \beta$ .

To kończy dowód lematu; dalej dowód twierdzenia 5 przebiega analogicznie do dowodu twierdzenia 2.  $\square$

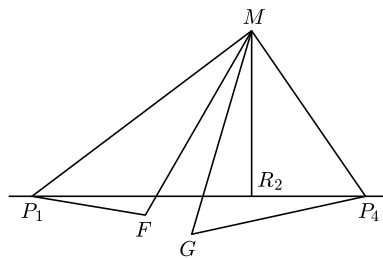
Dla obiektów poruszających się z identycznymi prędkościami maksymalnymi istnieją na płaszczyźnie i w przestrzeni modele *pulapek* i strategii *polowań* o stuprocentowej skuteczności, przynajmniej teoretycznie. Dodatkowo, dzieje się to przy założeniu braku wymiany informacji między goniącymi i nie wymaga koordynatora! Ten ostatni element stwarza jednak pewne ryzyko w praktycznych zastosowaniach tej teorii: uruchomionym pościgiem nie można sterować. Wydaje się, że tego typu strategii mogą być stosowane w programowaniu, grach ekonomicznych i wojennych, a może także na poziomie molekularnym, np. do zwalczania groźnych komórek – to jednak temat na inny artykuł.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

