Układanie prostokątów

*Joachim JELISIEJEW**

W tym artykule zastanawiamy się nad pytaniem

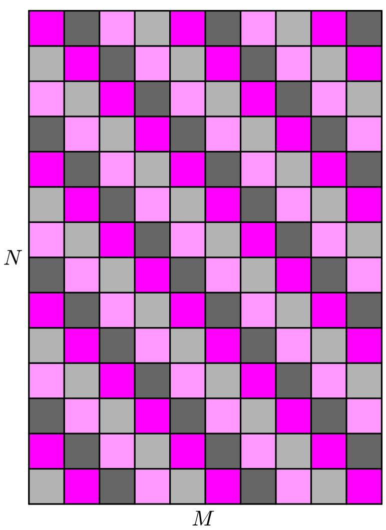
kiedy szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Pokryć to znaczy ułożyć prostokąty na szachownicy tak, by nie zachodziły na siebie i by cała powierzchnia szachownicy była zakryta. Przez cały artykuł patrzymy tylko na prostokąty położone w taki sposób, że zakrywają n kolejnych pól (w rzędzie lub kolumnie).

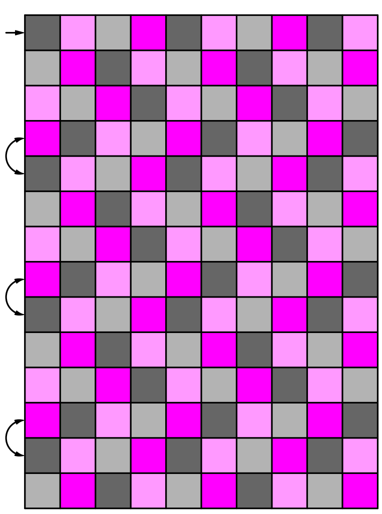
Naturalna próba odpowiedzi to: *szachownicę można pokryć, gdy n dzieli długość któregoś z boków, czyli gdy $n \mid N$ lub $n \mid M$*. Jasne jest, że w tym przypadku faktycznie można pokryć szachownicę. Ale czy są inne przypadki, w których istnieje pokrycie?

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to łatwo zauważyć, że nie: jeżeli duży prostokąt jest pokryty prostokątami $1 \times n$, to n dzieli jego pole, które jest równe NM. Skoro n jest pierwsza, to $n \mid N$ lub $n \mid M$.

W przypadku, gdy n nie jest pierwsza, sprawa nie jest taka prosta. Istnieje sporo klasycznych zadań z tej problematyki, dotyczących szczególnych przypadków tego pytania (patrz np. *deltoid* 4/2010). Okazuje się, że łatwiej dojść do rozwiązania, gdy potraktuje się problem ogólnie. Kluczem jest, jak we wspomnianym *deltoidze*, metoda kolorowania.



Rys. 1



Rys. 2

Pokolorujmy kolejne przekątne szachownicy n kolorami (na rysunku 1 mamy $n = 4$, $N = 14$, $M = 10$). Do dalszych rozważań potrzeba nam nieco oznaczeń i obserwacji. W większości przypadków znacznie łatwiej przekonać się o prawdziwości podanych stwierdzeń, np. patrząc na rysunek, niż porządnie opisać dowód, zatem uzupełnienie uzasadnień pozostawiamy Czytelnikowi.

1. Pola o tym samym kolorze leżące w tym samym rzędzie lub kolumnie są oddalone o dokładnie n. Wynika stąd kluczowy wniosek:

   każdy prostokąt $1 \times n$ zakrywa dokładnie jedno pole każdego koloru.
2. Mówimy, że rząd *ma kolor* a, jeżeli zaczyna się od pola koloru a.
3. Jeżeli n nie dzieli N, to rzędów niektórych kolorów jest o jeden więcej, niż rzędów pozostałych kolorów. Te kolory nazywamy *częstymi*. Pozostałe kolory nazywamy *nieczęstymi*. Na rysunku 1 magenta i jasnoszary są częste, a pozostałe nieczęste. Jeżeli n dzieli N, to wszystkie kolory nazywamy częstymi.
4. Jeżeli jest dokładnie k kolorów częstych, to N daje resztę k z dzielenia przez n.
5. *Kolorowanie pozwala rozróżniać rzędy.* Jeżeli n nie dzieli M, a rząd A i rząd B mają różne kolory, to istnieje taki kolor c, że liczba pól pokolorowanych na c jest różna w A i B.
6. *Przemalowywanie.* Wybierzmy dwa kolory a i b i przemalujmy każdy rząd koloru b na rząd koloru a i odwrotnie. Na rysunku 2 rzędy magenta przemalowano na ciemnoszare i odwrotnie. Następująca obserwacja jest kluczowa:

   po przemalowaniu każdy prostokąt $1 \times n$ zakrywa dokładnie jedno pole każdego koloru.

Oczywiście, wszystkie powyższe obserwacje przenoszą się na kolumny – wystarczy zamienić N z M w sformułowaniach powyżej.

Możemy już przejść do rozwiązania naszego problemu.

Zadanie 1. Kiedy szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Rozwiązanie. Wiemy, że jeśli $n \mid N$ lub $n \mid M$, to pokrycie istnieje. Wykażemy, że zachodzi również implikacja odwrotna: jeżeli istnieje pokrycie, to $n \mid N$ lub $n \mid M$.

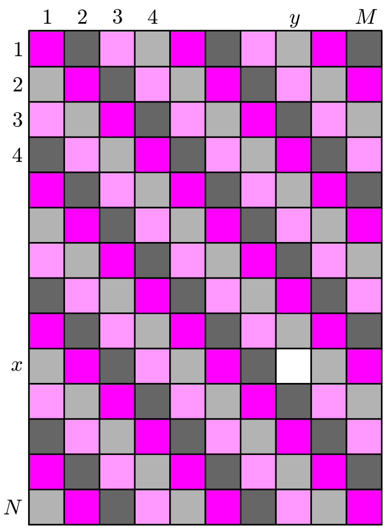
Załóżmy, że szachownicę $N \times M$ można pokryć prostokątami $1 \times n$ oraz liczba n nie dzieli ani N, ani M. Pokolorujmy szachownicę n kolorami, podobnie jak na rysunku 1. Z obserwacji 1 wynika, że pól każdego koloru jest tyle samo.

Skoro n nie dzieli N, to istnieje przynajmniej jeden kolor nieczęsty. Wybierzmy dowolny kolor częsty a i dowolny kolor nieczęsty b i przemalujmy rzędy a na b i odwrotnie (jak w przykładzie na rysunku 2).

Na mocy obserwacji 6 po przemalowaniu każdy prostokąt zawiera n pól o różnych kolorach, więc pól każdego koloru jest nadal tyle samo. Z drugiej strony, ubył

*doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski jeden rząd a, przybył zaś jeden rząd b. Z obserwacji 5 wynika, że liczba pól pokolorowanych na pewien kolor c zmieniła się, zatem mamy sprzeczność. □

Można zastanawiać się też, kiedy istnieje pokrycie szachownicy z wyciętymi polami: rogami, polem środkowym itp. Przyjrzyjmy się najprostszej modyfikacji zadania, czyli szachownicy z wyciętym jednym polem.

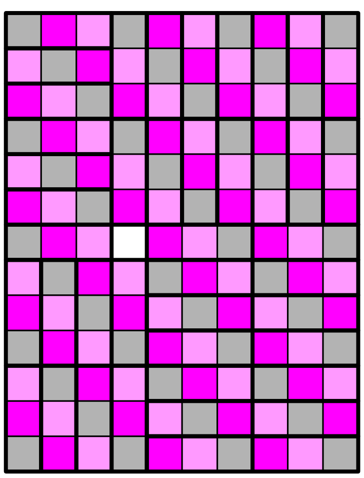


Rys. 3

Zadanie 2. Uzasadnij, że szachownicę $N \times M$ z wyciętym polem o współrzędnych (x, y), jak na rysunku 3, można pokryć prostokątami $1 \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z warunków:

1. n dzieli każdą z liczb $N-1$, $M-1$, $x-1$, $y-1$,
2. n dzieli każdą z liczb $N+1$, $M+1$, x, y.

Rozwiązanie. Jak zwykle Czytelnikowi pozostawiamy udowodnienie, że gdy któryś z warunków zachodzi, to pokrycie istnieje; prostokąty można wtedy ułożyć w cztery duże „bloki”, patrz rysunek 4 dla pokrycia z $N = 13$, $M = 10$, $n = 3$ oraz $(x, y) = (7, 4)$.



Rys. 4

Załóżmy zatem, że pokrycie prostokąta istnieje. Na początek chcemy rozważyć rzędy i stwierdzić, że

liczba n dzieli liczby $N-1$ i $x-1$ lub liczba n dzieli liczby $N+1$ i x.

Niech a będzie kolorem rzędu zawierającego wycięte pole. Załóżmy, że a jest częsty. Jeżeli istnieje inny kolor częsty b, to przemalowujemy a na b i b na a, jak w obserwacji 6. Pomijając wycięte pole, przemalowanie to nie zmienia liczby pól danego koloru na szachownicy, gdyż szachownica zawiera tyle samo rzędów koloru a i b. Skoro rzędy b i a są różnych kolorów, to pole w kolumnie y miało w tych rzędach różny kolor. Wobec tego po przemalowaniu liczba pól pewnego koloru zmniejszy się o jeden.

Z drugiej strony, prostokąt pokryty był prostokątami $1 \times n$, więc pól każdego koloru przed i po przemalowaniu jest tyle samo: $(NM-1)/n$. Zatem przemalowanie nie może zmieniać liczby pól żadnego koloru.

Sprzeczność pokazuje, że tylko kolor a jest częsty. Z obserwacji 4 wynika, że $n \mid N-1$. Zauważmy ponadto, że N-ty rząd ma kolor częsty, a więc kolor a. Wobec tego $n \mid N-x$, czyli $n \mid x-1$.

Podobnie rozumujemy, gdy a jest nieczęstym kolorem: stwierdzamy, że jest on jedynym nieczęstym kolorem, więc częstych kolorów jest $n-1$, stąd $n \mid N+1$. Ponadto rząd n-ty ma kolor nieczęsty, więc $n \mid n-x$, czyli $n \mid x$.

Popatrzmy teraz na kolumny. Podobnie jak w przypadku rzędów stwierdzamy, że

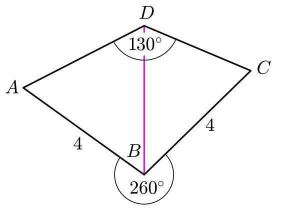
liczba n dzieli $M-1$ i $y-1$ lub liczba n dzieli $M+1$ i y.

Mamy łącznie cztery możliwości: dwie na mocy rozumowania „o rzędach” i dwie „o kolumnach”. Chcemy teraz wyeliminować możliwości $n \mid N+1$ i $n \mid M-1$ oraz $n \mid N-1$ i $n \mid M+1$. Załóżmy najpierw, że $n \geqslant 3$. Skoro prostokąty o polu n pokrywają szachownicę z wyciętym polem, która ma pole powierzchni $NM-1$, to $n \mid NM-1$. Gdyby $n \mid N+1$ i $n \mid M-1$, to $n \mid NM+1$, więc $n \mid (NM+1)-(NM-1) = 2$, co daje sprzeczność. Podobnie przypadek $n \mid N-1$ i $n \mid M+1$ prowadzi do sprzeczności. To kończy rozumowanie w przypadku $n \geqslant 3$.

Na koniec rozważmy przypadek $n = 2$ i załóżmy, że n dzieli liczby $N-1$, $x-1$, $M+1$, y. Wobec tego liczby N i M są nieparzyste. Nazwijmy kolor pola narożnego *białym*, zaś drugi kolor *czarnym*. Na pełnej szachownicy o nieparzystych długościach boków pól białych jest więcej niż czarnych. Zatem, jeżeli istnieje pokrycie szachownicy z wyciętym polem (x, y), to pole to ma kolor biały. To znaczy, że $2 \mid x-y$, i otrzymujemy sprzeczność z podzielnościami $2 \mid x-1$ oraz $2 \mid y$. To samo rozumowanie eliminuje przypadek, gdy 2 dzieli liczby $N+1$, x, $M-1$, $y-1$. □

Jak widać, przedstawiona metoda jest ogólna, w tym znaczeniu, że przy odrobinie czasu i cierpliwości można ją zastosować, na przykład, do szachownicy z rozsądną liczbą wyciętych pól. Na zachętę pozostawiamy Czytelnikowi kilka problemów.

Rozwiązanie zadania M 1435.
Zauważmy, że kąt zewnętrzny ABC ma miarę 260° – dwa razy większą od kąta ADC.



Zatem punkt D leży na okręgu o środku B i promieniu $BA = BC = 4$, skąd $BD = 4$.

Zadanie 3. Uzasadnić, że jeżeli $N, M, n \geqslant 3$, to szachownicę $N \times M$ z usuniętymi dwoma przeciwległymi rogami można pokryć prostokątami $1 \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli każdą z liczb $N-1$, $M-2$ lub n dzieli każdą z liczb $N-2$, $M-1$.

Zadanie 4. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym środkowym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Zadanie 5. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym narożnym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Wskazówka 5. Możemy uznać, że pole narożne ma współrzędne $(1, 1)$. Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n, które spełniają jeden z warunków
- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 0$,
- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1$, czyli $n = 1$.

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n, które są dzielnikami 2014.

Wskazówka 4. Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n, które spełniają jeden z warunków
- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 1012$,
- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1013$.

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n, które są dzielnikami 1012 lub 1013.

Wskazówka 3. Kolorujemy szachownicę na n kolorów jak w poprzednich przykładach. Załóżmy, że pierwszy rząd jest koloru a, zaś drugi – koloru b. Jeżeli n nie dzieli ani $N-1$ ani $N-2$, to rzędów kolorów a i b jest tyle samo, zaś ostatni rząd nie jest koloru a ani b. Przemalowujemy rzędy koloru a na kolor b i odwrotnie i sprawdzamy, że po tej zamianie liczba pól pewnego koloru zmieniła się. To daje sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że n dzieli $M-1$ lub $M-2$.

Jak zważyć czarną dziurę?

*Justyna MODZELEWSKA**

Masa jest miarą ilości materii, z której składa się obiekt fizyczny. To jedno z podstawowych pojęć w fizyce, może ono określać bezwładność (tzw. masa bezwładna) lub oddziaływanie grawitacyjne (tzw. masa grawitacyjna). Oszacowanie masy obiektów astronomicznych nie jest wcale prostą sprawą – nie da się ich przecież położyć na wadze. Czarne dziury są uważane przez wielu naukowców za niezwykle interesujące obiekty – być może dlatego, że nie da się ich obserwować wprost, okrywa je bowiem *horyzont zdarzeń*, spod którego nie dociera do obserwatorów zewnętrznych żadna informacja, nawet fotony poruszające się z największą dozwoloną w fizyce prędkością światła. Do opisu tego, co dzieje się na zewnątrz stacjonarnej czarnej dziury potrzeba jedynie dwóch parametrów, jej masy oraz miary tempa jej obracania się (momentu pędu). Astronomowie już od dłuższego czasu badają czarne dziury: okazuje się, że są one zjawiskiem bardzo powszechnym. Ogromne czarne dziury znajdują się w centrum prawdopodobnie każdej galaktyki. Dużo mniejsze czarne dziury istnieją również w układach podwójnych.

Jednym z pierwszych badaczy, którzy rozważali możliwość wysyłania sygnałów z otoczenia bardzo masywnych obiektów, był John Mitchell (1724–1793). Rozważał on problem prędkości ucieczki z powierzchni gwiazdy o masie M oraz promieniu R. Taką prędkość w prosty sposób możemy wyznaczyć z teorii Newtona – należy określić, dla jakiej prędkości energia całkowita cząstki o masie m jest równa zeru:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathrm{G}Mm}{R} = 0.$$

Otrzymujemy stąd $v = \sqrt{2\mathrm{G}M/R}$, czyli dobrze znaną *drugą prędkość kosmiczną*. Przyrównując ją do prędkości światła w próżni, wynoszącej $c = 299\,792\,458$ m/s, otrzymujemy odpowiadający tej sytuacji promień równy $R_g = 2\mathrm{G}M/c^2$.

*doktorantka, Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika PAN w Warszawie