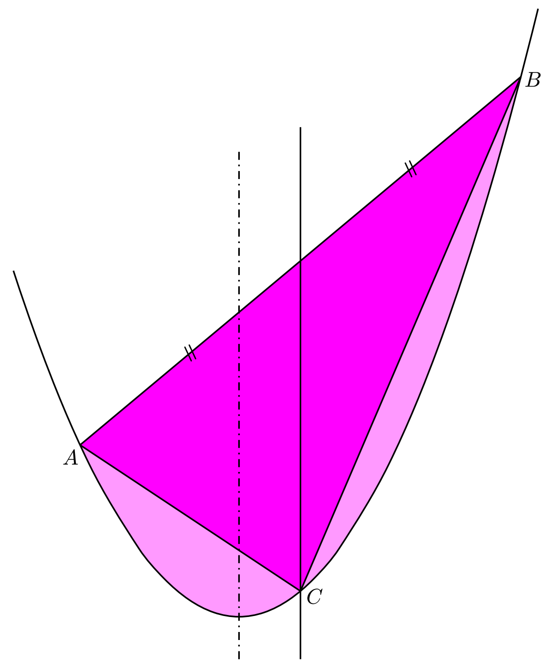
mała delta

Spróbuj zostać Archimedesem

Jeden ze sposobów obliczenia pola odcinka paraboli, czyli ograniczonej spośród części, na jakie dzieli płaszczyznę parabola i jej cięciwa, zaproponowany przez Archimedesa, jest następujący: przez środek cięciwy (nazwijmy ją AB) prowadzimy prostą równoległą do osi paraboli i uzyskujemy w przecięciu z parabolą punkt C;



pole odcinka paraboli to $\frac{4}{3}$ pola trójkąta ABC.

Dlaczego tak jest i jak on na to wpadł?

Co wiedział od poprzedników?

Od Eudoksosa (którego w wielu miejscach podziwia) pochodzi

Zasada wyczerpywania, która głosi
jeśli z jakiejś figury płaskiej wyjmiesz więcej niż połowę, z tego, co zostanie, znów wyjmiesz więcej niż połowę i będziesz tak postępował dalej, to suma pól wyjętych części dowolnie dokładnie przybliży pole tej figury.

Dowód tego faktu jest indukcyjny. Oznaczmy więc poszukiwane pole figury przez S, a kolejno wyjmowane fragmenty (nie muszą być w jednym kawałku) przez $U_1, U_2, U_3, \ldots$ Wykażemy, że

$$(*) \qquad U_1 + U_2 + \ldots + U_n \geqslant S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Dla $n = 1$ mamy tak z założenia. Jeśli więc dla pewnego k powyższa zależność ma miejsce, mamy też

$$\begin{aligned} &U_1 + U_2 + \ldots + U_{k+1} \geqslant \\ &\quad \geqslant U_1 + U_2 + \ldots + U_k + \frac{1}{2}(S - (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)) = \\ &\quad = \frac{1}{2} \cdot (S + (U_1 + U_2 + \ldots + U_k)) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left(S + S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \\ &\quad = S \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right), \end{aligned}$$

co dowodzi nierówności $(*)$.

Jeśli teraz zauważymy, że

$$S \geqslant (U_1 + U_2 + \ldots) \geqslant S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = S$$

(nierówność na początku wynika stąd, że wszystko wyjmowaliśmy z figury o polu S; równość na końcu to znany wzór na sumę szeregu geometrycznego), to tym samym zakończymy dowód zasady wyczerpywania.

O paraboli można bez końca.

Jest to tor pocisku wyrzuconego ukośnie w jednorodnym polu grawitacyjnym (oczywiście w próżni).

Albo przecięcie powierzchni stożka płaszczyzną równoległą do jednej z jego tworzących.

A także wykres funkcji kwadratowej

$$ax^2 + bx + c$$

– można ten wykres przesunąć tak, że będzie to funkcja ax^2, gdzie widać, że ma on oś symetrii, prostą $x = 0$ (jeśli punkt (x, y) należy do wykresu, to punkt $(-x, y)$ też).

Przez obracanie paraboli dookoła jej osi otrzymamy lustro, które równoległe do osi promienie skupi w jednym punkcie, zwanym ogniskiem paraboli.

Jeśli poprowadzimy prostą prostopadłą do osi tak, by środkiem odcinka utworzonego przez jej punkt przecięcia z osią i ogniska był punkt przeciecia osi parabolą (wierzchołek paraboli), to każdy punkt paraboli będzie w tej samej odległości od tej prostej (zwanej kierownicą) i od ogniska.

A w biegunowym układzie współrzędnych, którego środkiem będzie ognisko, a kąty mierzyć będziemy od odcinka ognisko-wierzchołek, to parabolę opisze równanie $r = p/(1 + \cos\varphi)$, gdzie p to odległość ogniska od kierownicy.

I tak dalej...

Co sam zauważył?

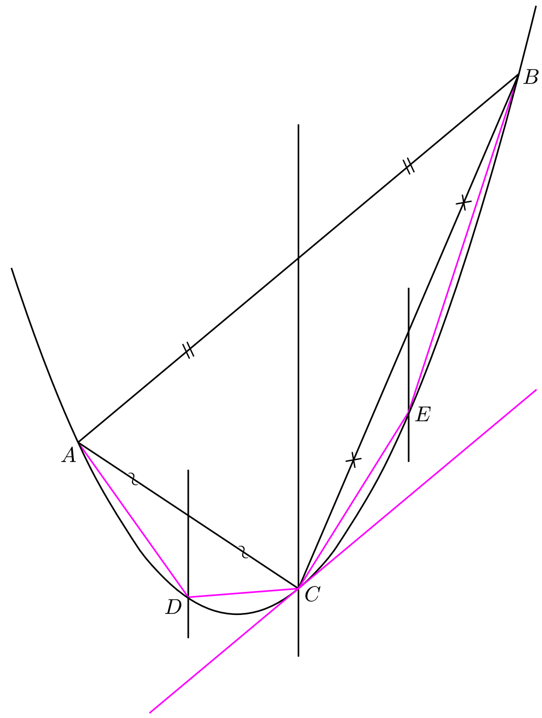
Pierwsze spostrzeżenie polegało na tym, że

styczna do paraboli poprowadzona w punkcie C, w którym przecina ją prosta równoległa do osi i przechodząca przez środek pewnej cięciwy AB tej paraboli, **jest równoległa do tej cięciwy**.

Drugie spostrzeżenie zaczyna się od tego, że przecież zarówno AC, jak BC też są cięciwami paraboli i

jeśli dla nich powtórzymy taką samą operację jak dla cięciwy AB, otrzymując odpowiednio punkty D i E, to trójkąty ACD i BCE **będą miały jednakowe pola**, co więcej, **równe jednej ósmej pola trójkąta** ABC.

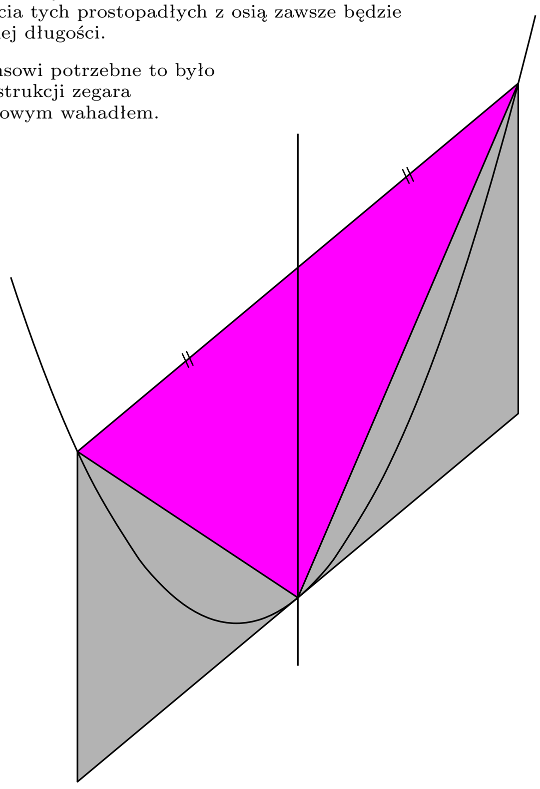
I jeśli Czytelnik Ambitny ma zamiar zostać matematykiem na miarę Archimedesa, powinien się sprawdzić, dowodząc poprawności obu tych spostrzeżeń.



A może wolisz pościgać się z kimś z XVII wieku?

Na przykład z Christiaanem Huygensem? Jeśli tak, to sprawdź, że gdy w dowolnym punkcie paraboli poprowadzimy prostopadłą do stycznej w tym punkcie i prostopadłą do osi, to odcinek utworzony przez punkty przeciecia tych prostopadłych z osią zawsze będzie tej samej długości.

Huygensowi potrzebne to było do konstrukcji zegara z obrotowym wahadłem.



A może z kimś z XIX wieku?

Na przykład z Victorem Ponceletem? Jeśli tak, to narysuj cztery proste, z których żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt, ale każda przecina wszystkie trzy pozostałe. Zobaczysz wtedy cztery trójkąty. Okręgi na nich opisane przecinają się w jednym punkcie, który jest na dodatek ogniskiem paraboli stycznej do tych czterech prostych. On to wiedział, a Ty?

Bo dalej jest już prosto!

Pierwsze spostrzeżenie pozwala stwierdzić, że wyjmując najpierw, jako U_1, trójkąt ABC, jako U_2 oba (razem!) trójkąty ACD i BCE, a potem cztery trójkąty analogicznie zbudowane w pozostałych czterech odcinkach paraboli, potem osiem itd., za każdym razem wyjmujemy więcej niż połowę tego, co jeszcze zostało do dyspozycji. Rysując bowiem równoległobok, którego jednym bokiem jest cięciwa, przyległe do niej boki są równoległe do osi paraboli, a ostatnim bokiem jest styczna w trzecim wierzchołku, widzimy, że wyjmowany trójkąt to dokładnie połowa tego równoległoboku, a on zawiera mierzony przez nas odcinek paraboli.

Drugie spostrzeżenie mówi nam, że za każdym razem wyjmujemy jedną czwartą tego, co wyjęliśmy w poprzednim kroku. Zatem, jeśli przez $[ABC]$ oznaczymy pole trójkąta ABC, to w sumie otrzymamy

$$[ABC]\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)=\frac{4}{3}[ABC].$$

Jak widać, wystarczy mieć trafne spostrzeżenia, a do wielkiej kariery matematycznej w zupełności wystarczy wiedza zdobyta w gimnazjum.

A jak Archimedes na to wpadł, oczywiście, nie wiemy.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS