



**Rozwiązanie zadania F 866.**

Energia potencjalna kulki dla maksymalnego wychylenia w lewo wynosi  $U_L = 2mgl \sin^2(\beta/2)$ , a w prawo  $U_P = 2mgl \sin^2(\alpha/2)$ . Dla małych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  mamy:  $U_L = mgl\beta^2/2$  i  $U_P = mgl\alpha^2/2$ . Po pierwszym uderzeniu w powierzchnię kulka będzie miała energię kinetyczną  $U_1 = K mgl(\beta^2 - \alpha^2)/2$  i wychyli się o kąt  $\beta_1$ , odpowiadający sumie tej energii kinetycznej i energii potencjalnej odpowiadającej wychyleniu o kąt  $\alpha$ , czyli  $\beta_1^2 = K\beta_0^2 + (1-K)\alpha^2$ . Powtarzając to rozumowanie dla kolejnych uderzeń, dostajemy ogólne wyrażenie na wartość kąta po  $n$ -tym uderzeniu:  $\beta_n = \sqrt{K^n \beta_0^2 + (1-K^n)\alpha^2}$ . Zauważmy, że  $\beta_n \rightarrow \alpha$  dla  $n \rightarrow \infty$ , chyba że  $K = 1$  (zderzenie sprężyste), kiedy to  $\beta_n = \beta_0$  dla dowolnego  $n$ .

gdzie  $\tau$  jest czasem przejścia przez perigeum, a

$$N = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad (\text{III prawo Keplera})$$

zwane *ruchem średnim* w istocie jest uśrednioną prędkością kątową satelity, natomiast  $a$  i  $e$  oznaczają odpowiednio *półos wielką* orbity (połowę odległości między perigeum i apogeum) oraz *mimośród* (spłaszczenie) orbity. Dla skrócenia zapisu wprowadziliśmy  $\mu = GM_{\oplus} = 398600,4418 \cdot 10^9 \text{ m}^3/\text{s}^2$  zamiast iloczynu stałej grawitacji i masy Ziemi.

Chociaż obliczenia prowadzimy w układzie płaszczyzny orbity, to będziemy korzystać wyłącznie z iloczynów wektorów, aby wynik przedstawić w postaci niezależnej od wyboru układu współrzędnych. Kwadraty długości wektorów mamy z twierdzenia Pitagorasa lub z iloczynu skalarnego wektora przez siebie, co na jedno wychodzi:

$$(4) \quad r^2 \equiv |\mathbf{r}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = a^2(1 - e \cos E)^2 \Rightarrow e \cos E = 1 - \frac{r}{a},$$

$$(5) \quad v^2 \equiv |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} = \frac{\mu}{r} \left(2 - \frac{r}{a}\right),$$

gdzie ostatnia równość wynika z podstawienia (4) do (5). Z ostatniego wzoru wynika, że energia całkowita  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$  jest stała, jak należało oczekiwać, oraz:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}.$$

Mając półos  $a$  orbity, spłaszczenie orbity znajdziemy z pomocą iloczynu skalarnego (1) przez (2):

$$(6) \quad d \equiv \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{\mu a}} = \frac{-(\cos E - e) \sin E + (1 - e^2) \sin E \cos E}{1 - e \cos E} = e \sin E.$$

Korzystając z (4) oraz (6), mamy

$$e^2 = \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + d^2, \quad \text{tg } E = \frac{d}{1 - \frac{r}{a}}.$$

Tak znalezione  $e$  i  $E$  po podstawieniu do (3) dają  $M$  oraz czas  $\tau$ . Ćwiartkę, do której należy kąt  $E$  (i podobnie dla innych kątów), określamy na podstawie znaków funkcji  $\sin$  i  $\cos$ , natomiast wartość samego kąta wyznaczymy za pomocą funkcji  $\text{arc tg}$ .

Gdy  $a$ ,  $e$  i  $\tau$  są znane, to pozostaje wyznaczyć trzy elementy określające orientację orbity w przestrzeni. Dwa z nich to kąty  $i$  oraz  $\Omega$  wskazujące kierunek wektora *momentu pędu*  $\mathbf{h}$  w układzie współrzędnych, w którym oś  $z$  pokrywa się z osią obrotu Ziemi. Moment pędu jest proporcjonalny do iloczynu wektorowego  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{v}$ , który w układzie współrzędnych o osiach  $x$ ,  $y$  leżących w płaszczyźnie orbity ma postać:

$$(7) \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{v} = (0, 0, h_z), \quad \text{gdzie}$$

$$h_z = \frac{\sqrt{a\mu(1 - e^2)}}{1 - e \cos E} [(\cos E - e) \cos E + \sin^2 E] = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}.$$

Zasada zachowania pędu zapewnia, że  $\mathbf{h}$  w nieobrcającym się układzie jest stałe. Znajdziemy teraz współrzędne wektora  $\mathbf{h}$  w układzie współrzędnych, którego oś  $z$  pokrywa się z osią obrotu Ziemi. W tym układzie współrzędnych, składowa tego wektora w płaszczyźnie  $xy$  to  $\mathbf{h}_{xy} = (h_x, h_y, 0)$ . Nachylenie  $i$  wektora  $\mathbf{h}$  do osi  $z$  oraz nachylenie  $\Omega - \pi/2$  wektora  $\mathbf{h}_{xy}$  do osi  $x$  wynikają ze stosunku ich składowych:

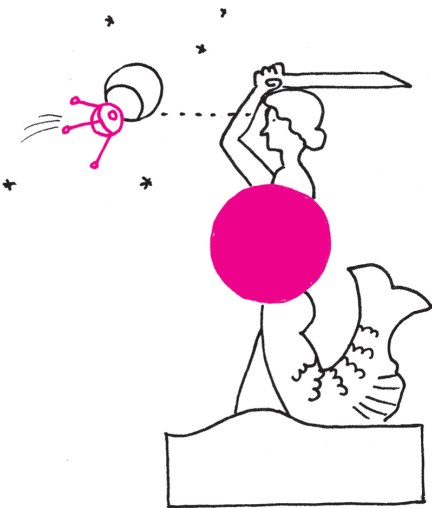
$$\text{tg } i = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h_z},$$

$$\text{tg} \left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{h_y}{h_x} \Rightarrow \text{tg } \Omega = \frac{+h_x}{-h_y}.$$

Sam kąt  $\Omega$  to kąt w płaszczyźnie  $xy$  między osią  $x$  a prostopadłym do  $\mathbf{h}_{xy}$  wektorem

$$\mathbf{n} = (0, 0, 1) \times \mathbf{h} = (-h_y, h_x, 0)$$

wskazującym *linię węzłów*, tj. linię przecięcia orbity z płaszczyzną  $xy$ .

**Rozwiązanie zadania M 1437.**

Odp. Nie!

Rozważmy macierz  $5 \times 9$  zawierającą 44 jedynki i zero. Szukana podmacierz musiałaby zawierać 22 jedynki, a więc mieć 23 lub 22 wyrazy. W takim razie musiałaby mieć wymiary  $1 \times 23$  lub  $23 \times 1$ ,  $1 \times 22$  lub  $22 \times 1$ ,  $2 \times 11$  lub  $11 \times 2$ , co nie jest możliwe.

Powróćmy do układu płaszczyzny orbity. Zanim wyznaczmy położenie perigeum, znajdziemy pomocniczy wektor, mnożąc wektorowo (2) oraz (7):

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \sqrt{\mu(1-e^2)}(1-e \cos E)^{-1}(\sqrt{1-e^2} \cos E, \sin E, 0).$$

Następnie odejmując (1) podzielone przez (4), otrzymujemy

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = (e, 0, 0).$$

Tak zdefiniowany wektor *mimosładowy* ma długość  $e$  i wskazuje kierunek perigeum. Wektory  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{e}$  całkowicie określają orientację orbity. Prostopadły do  $\mathbf{e}$  wektor

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{h} \times \mathbf{e} = (0, h_z e, 0)$$

też leży w płaszczyźnie orbity. Zatem iloczyny skalarne  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$  i  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$  są proporcjonalne do sinusa i kosinusa kąta  $\omega$ , jaki kierunek perihelium tworzy z linią węzłów, skąd:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}} \frac{e}{f}.$$

Kąty *nachylenie*  $i$ , *argument perigeum*  $\omega$  i *długość linii węzłów*  $\Omega$  w pełni określają położenie orbity. Ponieważ wszystkie elementy określiliśmy za pomocą iloczynów wektorów, to wzory pozostają słuszne po dowolnym obrocie orbity, zmieniają się tylko składowe wektorów, ale nie ich długości i kąty między nimi. Zatem do powyższych iloczynów wektorowych można teraz podstawić znane wektory w układzie GI, by otrzymać elementy orbity i wektory pomocnicze w tym właśnie układzie.

**Widoczność w Warszawie.** Teraz możemy opisać sposób znalezienia odpowiedzi na pytanie postawione na samym początku. Dla nowego momentu czasu  $t_W$  należy obliczyć  $M$ , następnie rozwiązać (3) na  $E$  i znaleźć  $\mathbf{r}$  w płaszczyźnie orbity z (1). Wtedy w układzie GI położenie będzie równe  $\mathbf{r}_{GI} = x_e \mathbf{e} + y_f \mathbf{f}$ , gdzie wektory  $\mathbf{e}$  i  $\mathbf{f}$  określają kierunki dużej i małej osi orbity. Dalej, oznaczając położenie Warszawy przez  $\mathbf{r}_W$ , możemy wyrazić wektor wodzący z Warszawy do satelity jako  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{GI} - \mathbf{r}_W$ , a kosinus kąta między zenitem a satelitą, pomijając spłaszczenie Ziemi, wynosi:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}_W}{R r_W}.$$

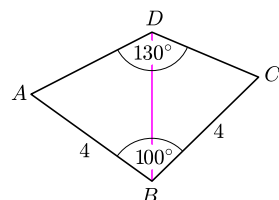
Dokończenie rachunków i znalezienie ostatecznej odpowiedzi na postawione na początku artykułu pytanie pozostawiamy Czytelnikowi.

Zainteresowani Czytelnicy mogą także wykonać obliczenia dla swojego położenia i w dowolnej chwili, korzystając z danych TLE BRITE-PL Lem publikowanych przez NORAD. Są one podane w nierotującym układzie względem punktu  $\Upsilon$  w płaszczyźnie  $xz$  (rektascencja i deklinacja). Pozycję  $\Upsilon$  określa się na podstawie zliczenia dni juliańskich (JD) dla danej daty i obrotu Ziemi względem  $\Upsilon$ , tj. czasu gwiazdowego w Greenwich. Przy tym na podstawie czasu, jaki upłynął od epoki TLE, warto uwzględnić precesję  $\Omega$ , biorąc pod uwagę jej szybkość podaną w TLE jako  $\dot{\Omega}$ .

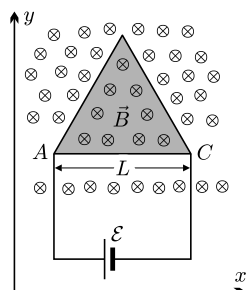


## Zadania

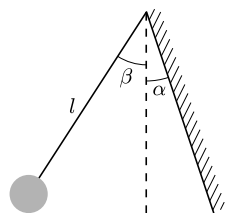
Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**M 1435.**  $ABCD$  jest czworokątem wypukłym, w którym  $AB = BC = 4$ ,  $\sphericalangle ABC = 100^\circ$ ,  $\sphericalangle CDA = 130^\circ$  (rys. 1). Znaleźć długość odcinka  $BD$ .

Rozwiązanie na str. 8

**M 1436.** Niech liczby  $a, b, c$  z przedziału  $[-1, 1]$  spełniają

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + 2abc.$$

Pokazać, że dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$ ,

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leq 1 + 2(abc)^n.$$

Rozwiązanie na str. 16

**M 1437.** Czy dla każdej macierzy  $m \times n$  o wyrazach ze zbioru  $\{0, 1\}$  zawierającej parzystą liczbę jedynek istnieje podmacierz (otrzymana z wyjściowej macierzy przez wykreślenie pewnej liczby wierszy i pewnej liczby kolumn, niekoniecznie kolejnych), zawierająca dokładnie połowę wszystkich jedynek?

Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Michał NAWROCKI

**F 865.** W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  umieszczono cienką metalową płytkę, mającą kształt trójkąta równobocznego o boku  $L$ . Grubość płytki wynosi  $d$ , jej gęstość jest równa  $\rho$ , a jej powierzchnia jest prostopadła do kierunku pola magnetycznego. Do wierzchołków  $A$  i  $C$  trójkąta (rys. 2) dołączono źródło napięcia o sile elektromotorycznej  $\mathcal{E}$  i oporności wewnętrznej  $R_0$ . Znaleźć przyspieszenie płytki. Zaniedbać masę, oporność i sprężystość łączących przewodów oraz oporność płytki. Rozwiązanie na str. 3

**F 866.** Na powierzchni nachylonej do pionu pod małym kątem  $\alpha$  zawieszono na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości  $l$  kulkę o masie  $m$ . Kulkę wychyleno na lewo o mały kąt  $\beta_0$  większy od  $\alpha$  (rys. 3) i puszczono. Właściwości sprężyste kulki i powierzchni są takie, że stosunek energii kinetycznej kulki bezpośrednio po zderzeniu do jej energii kinetycznej bezpośrednio przed zderzeniem wynosi  $K$  ( $0 < K < 1$ ). Jaki będzie maksymalny kąt dla kolejnych wychyleń kulki w lewo?

Rozwiązanie na str. 19