Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 677 ($WT = 1{,}51$) i 678 ($WT = 2{,}13$) z numeru 3/2014

Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	38,00
Michał Miodek	Zawiercie	35,31
Jerzy Cisło	Wrocław	34,05
Wojciech Tobiś	Praszka	32,96
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Zadania z matematyki nr 687, 688

Redaguje Marcin E. KUCZMA

687. Dowieść, że wśród dowolnie wybranych 39 kolejnych liczb naturalnych znajdzie się liczba, której suma cyfr dzieli się przez 11.

688. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$. Na krawędziach SA, SB, SC leżą takie punkty X, Y, Z, że suma kwadratów pól trójkątów SXY, SYZ, SZX jest równa kwadratowi pola trójkąta XYZ. Obliczyć objętość ostrosłupa $ABCS$.

Zadanie 688 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2014

Przypominamy treść zadań:

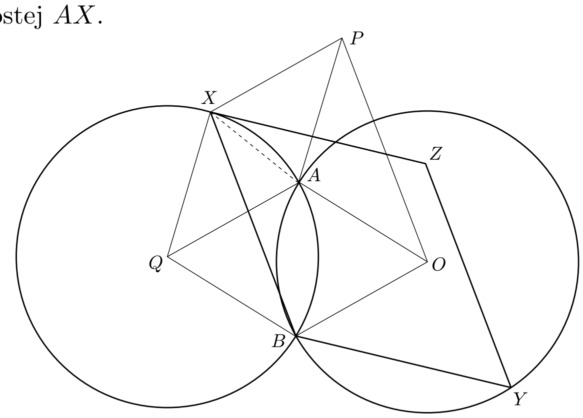
683. Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach A i B. Punkt X leży na jednym z tych okręgów, punkt Y na drugim, przy czym prosta XY nie przechodzi ani przez A, ani przez B, ani przez środek odcinka AB. Punkt Z jest wierzchołkiem równoległoboku $XBYZ$. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach AXZ, AYZ są przystające do dwóch danych okręgów.

684. Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych p, q układ równań

$$a^2 + b^2 = p, \quad x^2 + y^2 = q, \quad (a-x)^2 + (b-y)^2 = |p-q|$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

683. To zadanie o równoległobokach. Oznaczmy środek okręgu (ABY) przez O, środek okręgu (ABX) przez Q, i niech P będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej AX.



Czworokąty $QAPX$ i $QAOB$ są rombami. Zatem

$$|PX| = |AQ| = |OB| \quad \text{oraz} \quad PX \parallel AQ \parallel OB,$$

skąd wniosek, że czworokąt $XBOP$ jest równoległobokiem. Również czworokąt $XBYZ$ jest (z założenia) równoległobokiem. Stąd – jak przed chwilą – wnosimy, że równoległobokiem jest także czworokąt $POYZ$. Wobec tego $|PZ| = |OY|$.

Ta równość, wraz z poprzednią uwagą o rombie $QAPX$, pokazuje, że odległość punktu P od każdego z trójki punktów Z, A, X jest równa promieniowi dwóch danych okręgów. Inaczej mówiąc, P jest środkiem okręgu przystającego do nich i przechodzącego przez punkty Z, A, X; to jest pierwsza część tezy. Druga część tezy, dotycząca okręgu opisanego na trójkącie AYZ, wynika z pierwszej przez symetrię (logiczną).

684. Przypuśćmy, że liczby p, q oraz a, b, x, y spełniają podane warunki. Można przyjąć, że $p > q$. Odejmując pierwsze równanie od drugiego i uwzględniając równanie trzecie, dostajemy związek $ax + by = x^2 + y^2$, czyli

$$(1) \qquad x(a-x) + y(b-y) = 0.$$

Skoro suma $x^2 + y^2 = q$ jest liczbą pierwszą, zatem liczby x, y są względnie pierwsze i żadna z nich nie jest zerem. Z równania (1) wynika teraz, że x jest dzielnikiem różnicy $b - y$, zaś y jest dzielnikiem różnicy $a - x$. Tak więc $b - y = kx$, $a - x = ly$ dla pewnych liczb całkowitych k, l. Po podstawieniu do równania (1) mamy $xy(k + l) = 0$. Ale $xy \neq 0$, więc $l = -k$, i dalej:

$$b = kx + y, \qquad a = x + ly = x - ky$$

oraz

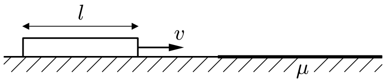
$$p = a^2 + b^2 = (x - ky)^2 + (kx + y)^2 = \\ = (k^2 + 1)(x^2 + y^2) = (k^2 + 1)q.$$

Dla liczby pierwszej p taka równość zachodzić nie może. Sprzeczność dowodzi, że liczby o podanych własnościach nie istnieją.

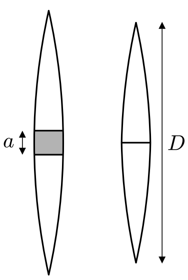
(Rezultat tego zadania ma ciekawą interpretację: nie istnieje trójkąt prostokątny o wierzchołkach w punktach kratowych płaszczyzny, w którym kwadraty długości dwóch boków – przeciwprostokątnej i jednej przyprostokątnej – byłyby liczbami pierwszymi).

Klub 44

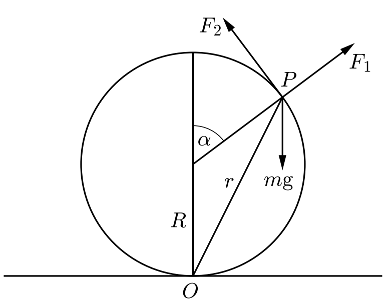
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2014



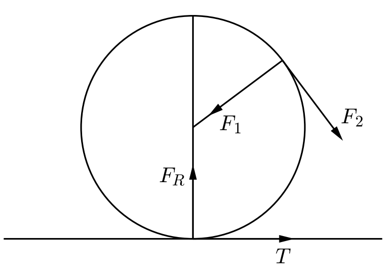
Rys. 1



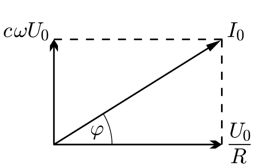
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania z fizyki nr 584, 585

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

584. Po gładkiej, poziomej płaszczyźnie ślizga się z prędkością v jednorodny klocek o długości l. Klocek wsuwa się na szorstki odcinek powierzchni o współczynniku tarcia μ. Po jakim czasie klocek zatrzyma się?

585. Z cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 50$ cm usunięto część środkową o szerokości $a = 0{,}6$ mm. Obie połówki soczewki stykają się. Średnica soczewki wynosi $D = 6$ cm. W odległości f od soczewki, na jej osi optycznej, ustawiono punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ m. Z drugiej strony soczewki umieszczony jest ekran. Jakie musi być położenie ekranu, aby można było obserwować na nim prążki interferencyjne? Zakładając, że warunek ten jest spełniony, znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2014

Przypominamy treść zadań:

580. Do powierzchni nieważkiej sfery przymocowany jest mały koralik, który możemy traktować jak punkt materialny. Sfera leży na poziomej podstawce, w chwili początkowej koralik znajduje się w najwyższym położeniu. Zakładamy, że sfera nie ślizga się po podstawce, dopóki wywiera na nią siłę nacisku. Na jakiej wysokości nad podstawką znajdzie się koralik po wytrąceniu z położenia równowagi, gdy sfera zacznie ślizgać się po podstawce?

581. Przez płaski kondensator, wypełniony dielektrykiem o stałej dielektrycznej ε i oporze właściwym ρ, płynie prąd $I(t) = I_0 \sin \omega t$. Znaleźć amplitudę napięcia na kondensatorze. Powierzchnia okładek kondensatora wynosi S, odległość między okładkami jest równa d.

580. Rozważmy układ w położeniu przedstawionym na rysunku 3 zakładając, że sfera toczy się jeszcze bez poślizgu. Na koralik w punkcie P działa siła ciężkości mg oraz siła reakcji sfery, której składowe wzdłuż promienia sfery i prostopadłą do promienia oznaczyliśmy przez F_1 i F_2. Rysunek 4 przedstawia siły działające na sferę. Ponieważ sfera jest nieważka, wypadkowa działających na nią sił oraz wypadkowy moment sił względem dowolnego punktu wynosi zero. Zatem z drugiego warunku $T = F_2$. Gdy koralik przestaje naciskać na sferę znika siła tarcia T i z pierwszego warunku znikają wszystkie siły działające na sferę. Dopóki sfera toczy się bez poślizgu, ruch koralika możemy traktować jako czysty obrót wokół chwilowego środka w punkcie O styczności sfery z podstawką. Wypadkowa sił działających na koralik jest siłą dośrodkową i w chwili, gdy rozpoczyna się poślizg równa jest składowej siły ciężkości wzdłuż odcinka OP: $\frac{mv^2}{r} = mg \cos \frac{\alpha}{2}$, gdzie $r = |OP| = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$ (R jest promieniem sfery). Jedyną siłą zewnętrzną działającą na układ, która wykonuje pracę, jest siła ciężkości działająca na koralik, z zasady zachowania energii mamy więc: $\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha)$. W chwili, gdy sfera przestaje naciskać na podstawkę $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Koralik znajduje się wtedy na wysokości $h = \frac{4R}{3}$. Od tej chwili koralik porusza się tylko pod działaniem siły ciężkości, czyli po paraboli, do momentu uderzenia w podstawkę. Sfera ślizga się po podstawce obracając się jednocześnie wokół własnej osi.

581. Układ możemy traktować jako połączenie równoległe opornika o oporze $R = \frac{\rho d}{S}$, przez który płynie prąd o natężeniu I_1 i kondensatora o pojemności $c = \frac{\epsilon_0 \varepsilon S}{d}$, przez który płynie prąd o natężeniu I_2, przy czym $I = I_1 + I_2$. Napięcia na oporniku i kondensatorze są jednakowe: $U_R = U_c = U_0 \sin(\omega t - \varphi)$, gdzie φ jest przesunięciem fazowym między napięciem i natężeniem prądu całkowitego I a U_0 szukaną amplitudą napięcia. Ładunek na kondensatorze wynosi $Q = cU_0 \sin(\omega t - \varphi)$, stąd $I_2 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = c\omega U_0 \cos(\omega t - \varphi) = c\omega U_0 \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. Natężenie prądu płynącego przez opornik $\frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{R}$. Wprowadźmy wektory o długościach $I_{10} = \frac{U_0}{R}$ oraz $I_{20} = c\omega U_0$, które tworzą ze sobą kąt $\frac{\pi}{2}$ i obracają się wokół wspólnego punktu zaczepienia z prędkością kątową ω tak, że ich rzuty na wyróżnioną oś wynoszą I_1 oraz I_2. Wtedy wektor będący ich sumą wektorową ma długość $I_0 = \sqrt{\frac{U_0^2}{R^2} + c^2\omega^2 U_0^2}$ (rys. 5). Szukane napięcie na kondensatorze wynosi $U_0 = \frac{I_0}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + c^2\omega^2}}$.