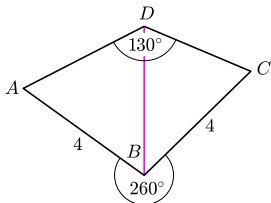




Rozwiązanie zadania M 1435.
Zauważmy, że kąt zewnętrzny ABC ma miarę 260° – dwa razy większą od kąta ADC .



Zatem punkt D leży na okręgu o środku B i promieniu $BA = BC = 4$, skąd $BD = 4$.

Zadanie 3. Uzasadnić, że jeżeli $N, M, n \geq 3$, to szachownicę $N \times M$ z usuniętymi dwoma przeciwnymi rogami można pokryć prostokątami $1 \times n$ wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli każdą z liczb $N - 1, M - 2$ lub n dzieli każdą z liczb $N - 2, M - 1$.

Zadanie 4. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym środkowym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Zadanie 5. Dla których całkowitych n szachownicę 2015×2015 z wyciętym narożnym polem można pokryć prostokątami $1 \times n$?

Wskazówka 3. Kolorujemy szachownicę na n kolorów jak w poprzednich przykładach. Załóżmy, że pierwszy rząd jest koloru a , zaś drugi b . Jeżeli n nie dzieli ani $N - 1$ ani $N - 2$, to rządów kolorów a i b jest tyle samo, zaś ostatni rząd nie jest koloru a ani b . Przenalujemy rząd koloru a na kolor b i odwrotnie i sprawdzamy, że po tej zamianie liczba pól pewnego koloru zmienia się. To daje sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że n dzieli $M - 1$ lub $M - 2$.

Wskazówka 4. Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n , które spełniają jeden z warunków

- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1013$,
- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 1012$,

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n , które są dzielnikami 1012 lub 1013.

Wskazówka 5. Możemy uznać, że pole narożne ma współrzędne $(1, 1)$. Na podstawie zadania 2 szukamy liczb n , które spełniają jeden z warunków

- $n \mid 2014$ oraz $n \mid 0$,
- $n \mid 2016$ oraz $n \mid 1$, czyli $n = 1$.

Innymi słowy, pokrycie istnieje dla tych n , które są dzielnikami 2014.

Jak zważyć czarną dziurę?

Justyna MODZELEWSKA*



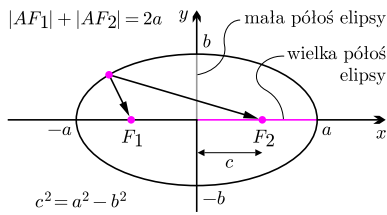
Masa jest miarą ilości materii, z której składa się obiekt fizyczny. To jedno z podstawowych pojęć w fizyce, może ono określać bezwładność (tzw. masa bezwładna) lub oddziaływanie grawitacyjne (tzw. masa grawitacyjna). Oszacowanie masy obiektów astronomicznych nie jest wcale prostą sprawą – nie da się ich przecież położyć na wadze. Czarne dziury są uważane przez wielu naukowców za niezwykle interesujące obiekty – być może dlatego, że nie da się ich obserwować wprost, okrywa je bowiem *horyzont zdarzeń*, spod którego nie dociera do obserwatorów zewnętrznych żadna informacja, nawet fotony poruszające się z największą dozwoloną w fizyce prędkością światła. Do opisu tego, co dzieje się na zewnątrz stacjonarnej czarnej dziury potrzeba jedynie dwóch parametrów, jej masy oraz miary tempa jej obracania się (momentu pędu). Astronomowie już od dłuższego czasu badają czarne dziury: okazuje się, że są one zjawiskiem bardzo powszechnym. Ogromne czarne dziury znajdują się w centrum prawdopodobnie każdej galaktyki. Dużo mniejsze czarne dziury istnieją również w układach podwójnych.

Jednym z pierwszych badaczy, którzy rozważali możliwość wysyłania sygnałów z otoczenia bardzo masywnych obiektów, był John Mitchell (1724–1793). Rozważał on problem prędkości ucieczki z powierzchni gwiazdy o masie M oraz promieniu R . Taką prędkość w prosty sposób możemy wyznaczyć z teorii Newtona – należy określić, dla jakiej prędkości energia całkowita cząstki o masie m jest równa zero:

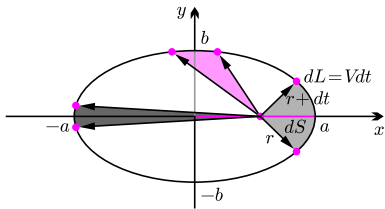
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

Otrzymujemy stąd $v = \sqrt{2GM/R}$, czyli dobrze znaną *drugą prędkość kosmiczną*. Przyrównując ją do prędkości światła w próżni, wynoszącej $c = 299\,792\,458$ m/s, otrzymujemy odpowiadający tej sytuacji promień równy $R_g = 2GM/c^2$.

*doktorantka, Centrum Astronomiczne im. M. Kopernika PAN w Warszawie

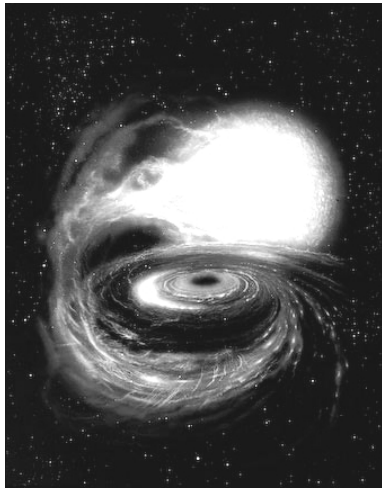


Rys. 1. Elipsa w układzie współrzędnych: F_1, F_2 są ogniskami elipsy, c jest odległością między środkiem elipsy a jednym z jej ognisk.



Rys. 2. Graficzne przedstawienie drugiego prawa Keplera.

Konsekwencją I prawa Keplera jest fakt, że **każde** z oddziałujących ciał obiega po elipsie środek masy układu.



Rys. 3. Artystyczna wizja ciasnego układu podwójnego.

Efekt Dopplera, dobrze znany np. z charakterystycznej zmiany wysokości dźwięku karetki pogotowia jadącej na sygnale, polega na zmianie długości fali, np. elektromagnetycznej, w zależności od prędkości źródła. Dla $|v| \ll c$ zmiana ta wyraża się wzorem:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$

gdzie v jest prędkością źródła względem obserwatora.

Prędkość ucieczki z „gwiazdy” o masie M i promieniu mniejszym od R_g jest większa od prędkości światła! Taka „gwiazda” jest niewidoczna, a jej istnienie można stwierdzić jedynie poprzez pośrednie oddziaływania z innymi świecącymi ciałami. Okazuje się, że wyrażenie na R_g uzyskane przez Mitchella pojawia się także w ogólnej teorii względności, a dokładniej w rozwiązaniu Schwarzschilda opisującym geometrię czasoprzestrzeni na zewnątrz sferycznie symetrycznego rozkładu mas. Wielkość R_g określa tam tzw. horyzont zdarzeń, nazywany też *promieniem Schwarzschilda*. Jako że czarne dziury nie widać, do określenia ich mas używa się wyników obserwacji towarzyszących im czasami w układach podwójnych świecących obiektów. Można tego dokonać przy znajomości trzech praw sformułowanych przez Johanna Keplera do opisu ruchu planet w Układzie Słonecznym. Prawa te są uniwersalne dla dowolnych dwóch ciał oddziałujących opisywanymi mechaniką newtonowską siłami grawitacyjnymi.

- I prawo Keplera: jedno z ciał porusza się względem drugiego po orbicie będącej krzywą stożkową, w ognisku której znajduje się drugie ciało,
- II prawo Keplera: prędkość polowa v_s w ruchu względnym pierwszego ciała względem drugiego jest stała – jest to konsekwencja zasady zachowania momentu pędu w polu grawitacyjnym; $v_s = dS/dt = \text{const}$,
- III prawo Keplera: jeśli ciało o masie m obiega ciało o masie M po orbicie eliptycznej o półosi wielkiej a , to

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2},$$

gdzie G to stała grawitacji, T – okres obiegu.

O ile tylko towarzysz czarnej dziury nie zbliża się do niej zanadto, także i on będzie posłuszny tym prawom.

Przykładem wykorzystania powyższej wiedzy jest oszacowanie masy supermasywnej czarnej dziury znajdującej się w centrum naszej Galaktyki. Dokładne obserwacje okolic centrum pozwoliły na znalezienie i określenie okresu orbitalnego pewnej gwiazdy (nazwanej S2): $T = 15,56 \pm 0,35$ lat. Jej orbita jest elipsą o półosiach długości 5,5 i 15,2 dni świetlnych. Orbita gwiazdy S2 pokrywa się praktycznie z płaszczyzną Galaktyki, w innych przypadkach obserwacje byłyby bardziej skomplikowane (obserwując jeden rzut pod nieznanym kątem, nie da się określić parametrów elipsy – potrzebny jest dodatkowy pomiar). Korzystając z trzeciego prawa Keplera, w którym masę gwiazdy m można zaniedbać w porównaniu z masą czarnej dziury M_{BH} , otrzymujemy

$$M_{\text{BH}} = M = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 G}.$$

Podstawiając do tego wzoru dane obserwacyjne, otrzymujemy

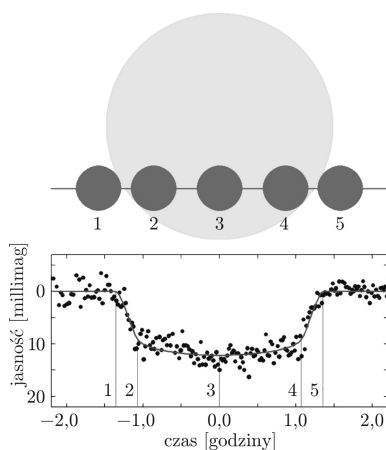
$$M_{\text{BH}} = 4,31 \cdot 10^6 M_{\odot}.$$

Niestety, nie zawsze jest tak łatwo. Galaktyczna czarna dziura znajduje się stosunkowo niedaleko nas, jeśli jednak zapagniemy zmierzyć masy innych supermasywnych czarnych dziur, zadanie się komplikuje – nie dysponujemy np. optycznymi danymi układu, z których odczytamy wszystkie potrzebne informacje. Nic jednak straconego! Aby nie komplikować dalszej dyskusji, przyjmijmy, że składniki układu poruszają się po torach kołowych, w III prawie Keplera należy zatem zamienić wielką półoś elipsy na promień odpowiedniego okręgu. Ponieważ prędkość liniowa ciała w ruchu po okręgu to $v = 2\pi R/T$, z III prawa Keplera uzyskujemy związek

$$v = \sqrt{\frac{G(M_{\text{BH}} + m)}{R}}$$

Obserwacje charakterystycznych linii widmowych obiektu, a w szczególności zmienność ich długości fal w czasie pozwala na oszacowanie, przy wykorzystaniu efektu Dopplera, prędkości, z jaką świecące ciało krąży wokół czarnej dziury. Łącząc wzory na prędkość liniową ruchu po okręgu i trzecie prawo Keplera, dostajemy:

$$2M_{\text{BH}} = \frac{v^3 T}{2\pi G}.$$



Rys. 4. Zmiana jasności obiektu podczas tranzytu.

Wyposażeni w tę wiedzę, rozważmy poszczególne przypadki, z których pierwszym jest *ciasny układ podwójny*. W tej sytuacji masa czarnej dziury i jej towarzysza są podobne. Okres obiegu określa się przy sprzyjających okolicznościach za pomocą obserwacji przejścia jednego ciała niebieskiego przez tarczę drugiego, czyli tranzytu, który powoduje chwilowy spadek jasności przykrywanego obiektu.

Aby taka sytuacja miała miejsce, oba składniki układu i obserwator muszą znajdować się w przybliżeniu w jednej linii. W przypadku dostatecznie dużych obiektów znajdujących się blisko siebie zawsze dojdzie do choćby częściowego zaćmienia.

Inną metodę ważenia stosuje się dla supermasywnych czarnych dziur w centrach aktywnych galaktyk. Dla galaktyk pobliskich korzysta się z pomiarów dyspersji prędkości gwiazd, w przypadku galaktyk odległych używa się natomiast modelu obszaru szerokich linii emisyjnych.

Przypadek pierwszy sprowadza się do obserwacji tzw. zgrubienia centralnego (ang. *galactic bulge*), w którym znajduje się większość materii galaktycznej. Z obserwacji zależności rozkładu prędkości gwiazd od odległości od centrum dla pobliskich galaktyk wyznacza się przybliżoną zależność między masą czarnej dziury a masą zgrubienia:

$$M_{\text{BH}} = 0,0002m_{\text{bulge}}.$$

Prędkość ruchu gwiazd wyznaczamy, posługując się efektem Dopplera. W tym przypadku nie mierzymy jednak prędkości pojedynczych gwiazd, ponieważ jest ich zbyt dużo. Przyjmujemy, że płaszczyzny orbit gwiazd rozłożone są przypadkowo. W momencie pomiaru niektóre gwiazdy przybliżają się do nas, inne oddalają. To powoduje, że wysyłana przez nie linia emisyjna jest przesunięta w stronę niebieską i czerwoną widma. W mierzonym widmie zgrubienia centralnego obserwujemy zatem bardzo szeroką linię emisyjną, której szerokość odpowiada typowej prędkości gwiazdy.

Przypadek drugi dotyczy odległych aktywnych galaktyk, których centralna czarna dziura ma dysk akrecyjny. Świeci on w zakresie promieniowania optycznego, nadfioletowego oraz rentgenowskiego, jest też źródłem obszaru szerokich linii emisyjnych. Obszar ten składa się z obłoczków materii wyrwanych z dysku akrecyjnego. Można je uznać za obiekty okrążające czarną dziurę i użyć tych samych argumentów co we wcześniejszych scenariuszach. Przyjmuje się, że w porównaniu z masą czarnej dziury masa obłoczków jest zaniedbywalna. Promieniowanie obłoczków dochodzi do ziemskich teleskopów z opóźnieniem zależnym od ich odległości od czarnej dziury. Z tej zależności można otrzymać promień orbity obłoczka, będącego źródłem szerokich linii emisyjnych, zakładając

$$c\tau = R,$$

gdzie τ to opóźnienie sygnału. W tym przypadku mamy do czynienia z liniami emisyjnymi i wykreślając zależność ilości energii od długości fali, dostajemy informację o szerokości linii, a tym samym o prędkości obłoczków. Ostatecznie, masę otrzymujemy z trzeciego prawa Keplera:

$$M_{\text{BH}} = \frac{v^2 R}{G}.$$

Opisana powyżej metoda jest nazywana metodą *echa świetlnego*.

Czarne dziury to bardzo ciekawe obiekty, są natchnieniem wielu obserwacji i rozmyślań teoretycznych, a oszacowanie ich mas jest bardzo ważne. Prawdziwa potęga fizyki ujawnia swoje oblicze: właśnie dzięki podstawowym prawom fizyki i obserwacjom można zważyć to, co niewidoczne dla oczu. Pozwalają one zbadać czarne dziury o masach 100 mln razy większych od Słońca oraz znajdujących się o miliardy lat świetlnych od nas. Podczas swoich studiów doktoranckich analizuję obserwacje odległego kwazara CTS C30.10, prowadzone za pomocą teleskopu SALT (ang. *Southern African Large Telescope*). Badając zachowanie się linii emisyjnej MgII, między innymi staram się oszacować masę czarnej dziury w tej aktywnej galaktyce.

