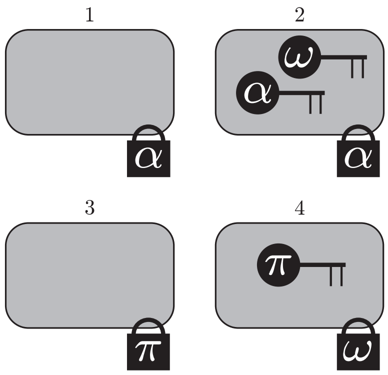
Informatyczny kącik olimpijski (76): Skarb

Zadanie *Skarb* pojawiło się w kwalifikacjach do konkursu Google Code Jam 2013. W skarbcu znajduje się n szkatułek, każda z nich zamknięta na kłódkę, która może być otwarta kluczem określonego rodzaju. W szkatułkach, oprócz kosztowności, mogą znajdować się klucze, które można wykorzystać do otwarcia innych szkatułek (w sumie jest m kluczy). Klucz, którym otworzyliśmy szkatułkę, nie może być użyty ponownie. Wchodząc do skarbca, mamy już kilka kluczy. Znając zawartość szkatułek, należy stwierdzić, czy istnieje taka kolejność ich otwierania, która pozwoli na otwarcie ich wszystkich (patrz rysunek).



Mamy cztery szkatułki i trzy zamknięte klucze. Rodzaje kluczy i kłódek oznaczone są literami greckimi. Początkowo mamy jeden klucz rodzaju α. Jedna z kolejności otwarcia wszystkich szkatułek to 2, 1, 4, 3. Jeśli zaczniemy od otwarcia szkatułki 1, to nie będziemy w stanie otworzyć już żadnej innej.

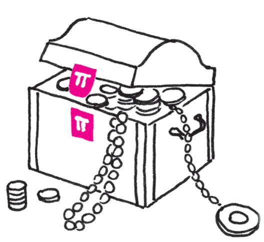
Zadanie jest całkiem trudne, spróbujmy więc rozwiązać jego prostszy wariant, w którym zaczynamy z jednym kluczem rodzaju x_I, a w każdej szkatułce jest co najwyżej jeden klucz. Zauważmy, że następujący warunek jest konieczny, by rozwiązanie istniało:

(A) kluczy ustalonego rodzaju musi być co najmniej tyle, ile jest kłódek tego rodzaju.

W szczególności oznacza to, że co najwyżej jedna szkatułka może być pusta. Otwarcie szkatułki zamkniętej na kłódkę rodzaju x i zawierającej klucz rodzaju y skutkuje wymienieniem klucza x na klucz y. Sytuację możemy więc przedstawić za pomocą skierowanego multigrafu G, którego wierzchołkami będą rodzaje kluczy, a skierowana krawędź $x \to y$ będzie istnieć dla każdej szkatułki zamkniętej na kłódkę rodzaju x, która zawiera w sobie klucz rodzaju y. Każda ścieżka w G, startująca z wierzchołka x_I opisuje możliwą do zrealizowania procedurę otwierania szkatułek (otwieramy szkatułki odpowiadające kolejnym krawędziom ścieżki). Innymi słowy, rozwiązanie istnieje, jeśli w multigrafie G istnieje ścieżka Eulera z wierzchołka x_I. Czytelnicy na pewno znają warunki, jakie musi spełniać skierowany multigraf, aby taka ścieżka istniała: (a) każdy wierzchołek musi mieć stopień wyjściowy równy wejściowemu (oprócz co najwyżej dwóch, w których te liczby mogą się różnić o 1) oraz (b) graf musi być (słabo) spójny.

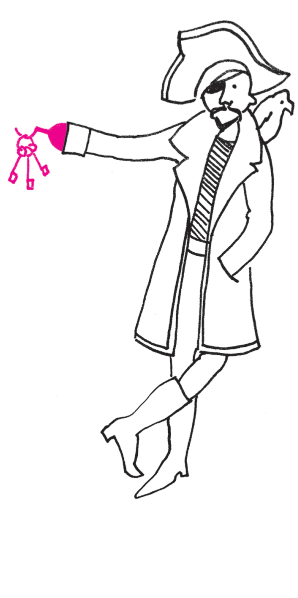
Nietrudno się przekonać, że warunek (a) wynika z warunku (A) i tego, że w każdej szkatułce jest co najwyżej jeden klucz. Jeśli założymy, że warunek (a) jest spełniony, to warunek (b) jest równoważny temu, że

(B) dla każdego rodzaju klucza da się zdobyć co najmniej jeden klucz tego rodzaju.



Nieprzypadkowo wyróżniliśmy warunki (A) i (B). Okazuje się bowiem, że są one konieczne i wystarczające do tego, by istniało rozwiązanie zadania w pełnej ogólności. (Tym razem w G mamy krawędź $x \to y$ dla każdego klucza rodzaju y zamkniętego w szkatułce na kłódkę rodzaju x.) Konieczność jest oczywista. Ponadto jeśli początkowa konfiguracja szkatułek spełnia warunek (A), to otwieranie szkatułek tego warunku nie popsuje (otwarcie szkatułki „zużywa” nam jeden klucz i kłódkę tego samego rodzaju). Pozostaje zatem udowodnić, że dla każdej konfiguracji spełniającej oba warunki istnieje szkatułka, której otworzenie doprowadzi do konfiguracji spełniającej warunek (B).

Załóżmy, że mamy klucz dowolnego rodzaju x, który otwiera pewną szkatułkę. Jeśli mamy wszystkie klucze tego rodzaju, to z warunku (A) możemy otworzyć wszystkie szkatułki zamknięte na kłódki rodzaju x, i warunek (B) będzie nadal spełniony.



W przeciwnym przypadku istnieje szkatułka zawierająca klucz rodzaju x, a z warunku (B) wynika, że istnieje ciąg rodzajów kluczy $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_{k-1} \to x_k = x$, który pozwala na zdobycie klucza x, zakładając posiadanie przez nas klucza x_0. Załóżmy, że jest to najkrótszy taki ciąg, zatem $x_i \neq x$ dla $1 \leqslant i \leqslant k-1$.

Jeśli $x_0 \neq x$, to możemy użyć klucza rodzaju x do otwarcia dowolnej szkatułki. Aby pokazać, że nie popsuje to warunku (B), rozważmy klucz dowolnego rodzaju y (być może $y = x$) i ciąg rodzajów kluczy $y_0 \to y_1 \to \ldots \to y_{\ell-1} \to y_\ell = y$, który pozwalał go zdobyć. Jedyna wątpliwość pojawia się, gdy x występuje w tym ciągu, zatem ciągi te mają jakiś element wspólny. Niech j będzie największym takim indeksem, że y_j równa się pewnemu x_i. Wtedy, po użyciu klucza x możemy nadal dostać się do klucza y, wykonując operacje z ciągu $x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_i = y_j \to y_{j+1} \to \ldots \to y_\ell = y$.

Z kolei jeśli $x_0 = x$, to otwieramy szkatułkę zawierającą klucz rodzaju x_1 i, powtarzając powyższe rozumowanie, również dowodzimy, że warunek (B) jest nadal spełniony.

Ostatecznie udowodniliśmy, że dla każdej konfiguracji spełniającej warunki (A) i (B) istnieje szkatułka, którą możemy otworzyć, aby uzyskać nową konfigurację również spełniającą oba warunki. Wykonując tę operację n razy, otworzymy wszystkie szkatułki. Jeśli chodzi o implementację, to sprawdzenie warunku (A) jest trywialne, zaś warunek (B) sprowadza się do przeszukania multigrafu G. Można to zrobić w czasie $O(n+m)$.

Tomasz IDZIASZEK