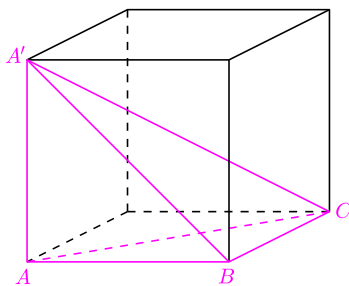
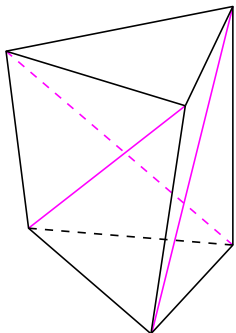


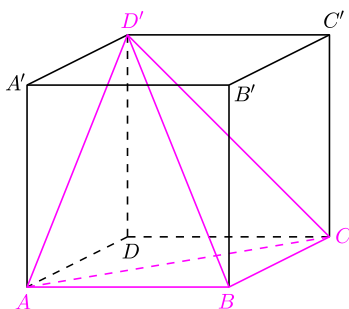
Rys. 1



Rys. 4. Jak widać, istnieje czworościan, którego każda ściana jest prostokątna.



Rys. 5. Wielościan Schönharda. Zewnętrzne kąty dwuścienne przy kolorowych krawędziach są mniejsze od  $180^\circ$  (M. Aigner, G.M. Ziegler, *Dowody z książki*, Wyd. Nauk. PWN, 2002).



Rys. 6

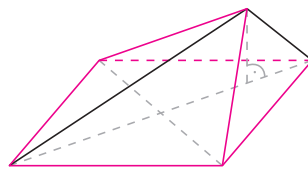
Zadanie 9 pochodzi z III Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

## A jednak istnieje!

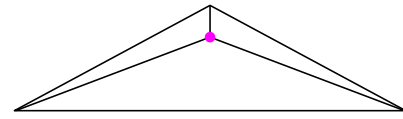
Joanna JASZUŃSKA

Niektóre wielościany są dość dziwne. Intuicja podpowiada, że nie powinny istnieć, a jednak istnieją. Czasem błędne przeczucia wynikają z nazbyt pochopnych uogólnień geometrii płaskiej na przestrzenną, czasem zaś z faktu, że świat wielościanów jest bogatszy, niż się na pierwszy rzut oka wydaje. Do budowania dziwnych wielościanów często przydają się pomocnicze sześciennie „szkielety”.

1. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, że dwie jego ściany boczne nie mające wspólnej krawędzi są prostopadłe do podstawy?
2. Wszystkie ściany boczne pewnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej są trójkątami równoramiennymi. Czy ostrosłup ten musi być prawidłowy?
3. Czy istnieje czworościan, którego każda ściana jest trójkątem rozwartokątnym?
4. Czy wysokości czworościanu muszą przecinać się w jednym punkcie?
5. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym można tak wybrać ponad połowę jego ścian, aby żadne dwie z wybranych ścian nie miały wspólnej krawędzi?
6. Czy każdy wielościan można striangulować, czyli podzielić na czworościany o wierzchołkach w wierzchołkach wyjściowego wielościanu?
7. Czy istnieje taki czworościan, w którym spodek żadnej wysokości nie należy do odpowiadającej jej podstawy?



Rys. 2



Rys. 3

### Rozwiązania

- R1.** Ściany  $ABS$  i  $CDS$  ostrosłupa z rysunku 1 są prostopadłe do podstawy.  $\square$
- R2.** Nie, ostrosłup z rysunku 2 ma wszystkie kolorowe krawędzie równej długości, więc spełnia warunki zadania, a nie jest prawidłowy.  $\square$
- R3.** Rysunek 3 to widok z góry takiego czworościanu, wysokość opuszczona z kolorowego wierzchołka jest bardzo niewielka.  $\square$
- R4.** W czworościanie z rysunku 4 wysokość  $A'A$  (na ścianę  $ABC$ ) nie ma wspólnych punktów z wysokością  $CB$  (na ścianę  $ABA'$ ), tym bardziej nie można więc oczekiwać wspólnego punktu dla wszystkich czterech wysokości.  $\square$
- R5.** Taki jedenastościan można uzyskać, obcinając wszystkie wierzchołki graniastosłupa trójkątnego tak, by otrzymać zamiast nich 6 trójkątnych, parami rozłącznych ścian (pozostałych 5 ścian powstaje ze ścian wyjściowego graniastosłupa).  $\square$
- R6.** Dowolny czworościan, który miałby zawierać dolną podstawę wielościanu z rysunku 5, musiałby także zawierać któryś z jego górnych wierzchołków. Jednak taki czworościan nie byłby w całości zawarty w tym wielościanie.  $\square$
- R7.** W czworościanie z rysunku 6 spodek wysokości z wierzchołka  $D'$  to punkt  $D$ . Wysokość z wierzchołka  $A$  zawarta jest w prostej  $AB'$ , prostopadłej do płaszczyzny  $BCD'A'$ , więc spodek tej wysokości to środek przedniej ściany sześciannu. Analogicznie spodem wysokości z wierzchołka  $C$  jest środek kwadratu  $BCC'B'$ . Przekątna  $B'D$  sześciannu jest prostopadła do ściany  $ACD'$  czworościanu, zatem wysokość z wierzchołka  $B$  jest równoległa do  $B'D$ , a co za tym idzie jej spodek również trafia poza odpowiednią podstawę.  $\square$

### Zadania domowe

8. Rozwiąż zadanie 1 dla ostrosłupa o podstawie czworokąta wklęsłego.
9. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny oraz taka płaszczyzna przecinająca wszystkie jego krawędzie boczne, że pole uzyskanego przekroju jest większe od pola podstawy ostrosłupa?