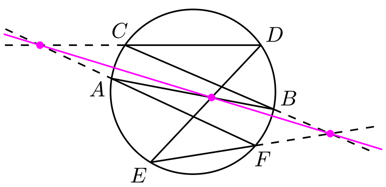
Twierdzenie Pascala

Joanna JASZUŃSKA

Twierdzenie Pascala (**TwP**) orzeka, że *jeśli sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, to punkty $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ są współliniowe* (rys. 1), gdzie $k \cap l$ to punkt przecięcia prostych k i l. Jest ono prawdziwe również dla sześciokątów, których pewne boki się przecinają lub pewne wierzchołki pokrywają. Przez AA rozumiemy wtedy prostą styczną do rozważanego okręgu w punkcie A.

W tym artykule zakładamy, że wszystkie rozważane punkty przecięcia prostych istnieją, ale **TwP** można uogólnić również na pozostałe przypadki. Ponadto, okrąg można zastąpić przez dowolną krzywą stożkową.



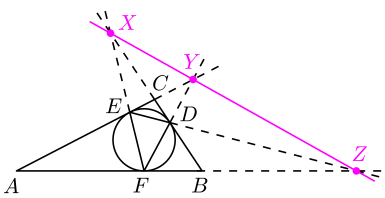
Rys. 1. **TwP**, jedna z wielu konfiguracji.

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że punkty $X = BC \cap EF$, $Y = CA \cap FD$, $Z = AB \cap DE$ leżą na jednej prostej.

2. Na czworokącie $ABCD$, który nie jest trapezem, opisano okrąg. Wykaż, że punkty $T = AC \cap DB$, $U = AA \cap DD$, $W = BB \cap CC$ leżą na jednej prostej.

3. Punkty A, P, C, Q, B leżą w tej kolejności na łuku okręgu O. Na odcinkach AC i BC wybrano takie punkty odpowiednio X i Y, że $\sphericalangle XPC + \sphericalangle YQC = 180°$. Wykaż, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste XY (przy ustalonych punktach A, P, C, Q, B) mają punkt wspólny.

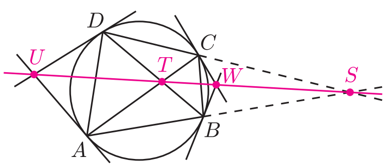
4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$, i takie punkty K i L w jego wnętrzu, że $\sphericalangle KAC = \sphericalangle LBA$ oraz $\sphericalangle KBC = \sphericalangle LAB$. Udowodnij, że punkty C, K, L są współliniowe.



Rys. 2

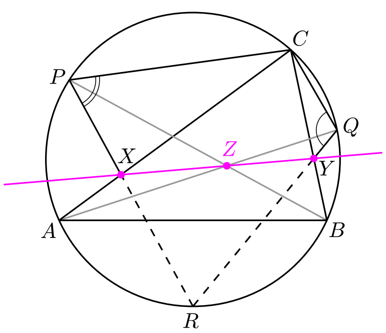
Rozwiązania

R1. Z **TwP** dla sześciokąta $DDEEFF$ (rys. 2), punkty $DD \cap EF = X$, $EE \cap FD = Y$ oraz $FF \cap DE = Z$ są współliniowe. □



Rys. 3

R2. Niech $S = BA \cap CD$ (rys. 3). Z **TwP** dla sześciokąta $AACDDB$, punkt $AA \cap DD = U$ leży na prostej wyznaczonej przez punkty $AC \cap DB = T$ oraz $CD \cap BA = S$. Z kolei z **TwP** dla $BBACCD$, punkt $BB \cap CC = W$ także leży na prostej wyznaczonej przez punkty $BA \cap CD = S$ oraz $AC \cap DB = T$. □

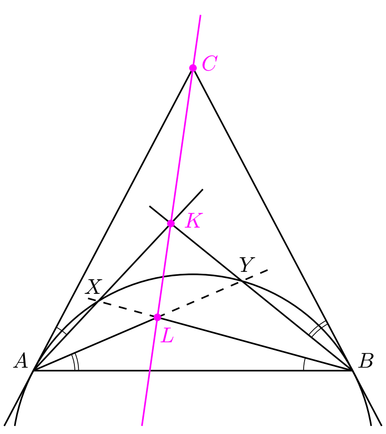


Rys. 4

R3. Z warunku $\sphericalangle XPC + \sphericalangle YQC = 180°$ wynika, że punkt $R = PX \cap QY$ leży na okręgu O (rys. 4). Z **TwP** dla sześciokąta $ACBPRQ$ uzyskujemy współliniowość punktów $AC \cap PR = X$, $CB \cap RQ = Y$ oraz niezależnego od X i Y punktu $Z = BP \cap QA$, co kończy dowód. □

R4. Oznaczmy $X = AK \cap BL$ oraz $Y = AL \cap BK$ (rys. 5). Z równoramienności trójkąta ABC oraz danych równości kątów wynika, że $\sphericalangle XAY = \sphericalangle XBY$. Ponieważ oba punkty A, B leżą po tej samej stronie prostej XY, oznacza to, że punkty A, B, X, Y leżą na jednym okręgu.

Z twierdzenia o stycznej i cięciwie oraz z równości $\sphericalangle KAC = \sphericalangle LBA$, okrąg ten jest styczny do prostej AC; analogicznie jest on styczny do BC. **TwP** dla sześciokąta $AAXBBY$ daje żądaną współliniowość punktów $AA \cap BB = C$, $AX \cap BY = K$ oraz $XB \cap YA = L$. □



Rys. 5

Zadania domowe

5. Okrąg O jest styczny do okręgu O' opisanego na trójkącie ABC w punkcie S, a do boków AC i BC odpowiednio w punktach D i E. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest środkiem odcinka DE.

Wskazówka. Niech proste SD, SE przecinają okrąg O' odpowiednio w drugich punktach K i L. Warto rozważyć **TwP** dla sześciokąta $ACBKSL$.

6. Punkt F leży na boku DE pięciokąta wypukłego $ABCDE$, przy czym $\sphericalangle FAC = \sphericalangle DBC$ oraz $\sphericalangle FCA = \sphericalangle EBA$. Wykaż, że $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BCD = 180°$.

Wskazówka. Niech $X = AF \cap BD$, $Y = CF \cap BE$, $Z = AE \cap CD$.

7. Uzasadnij poprawność konstrukcji opisanej w *Małej Delcie* w lutym 2014 r.