# Olimpiada

# Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej 2014/2015

## LVIII Olimpiada Astronomiczna

### Informacje regulaminowe

**1.** Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

**2.** Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.

**3.** W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **13 października 2014 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika, spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

**4.** Uczniowie, którzy prześlą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają na adres prywatny tematy drugiej serii oraz przydzielony im osobisty kod uczestnika. Zadania drugiej serii będą również zamieszczone, od 15 października 2014 r., na stronie internetowej olimpiady astronomicznej: `www.planetarium.edu.pl/oa.htm`.

**5.** Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **17 listopada 2014 r.** Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

**6.** W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

**7.** Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem:

**Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej**
**Planetarium Śląskie**
**41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**

w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

**8.** Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych, należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

**9.** Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem.

**Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika, dostępną na stronie internetowej olimpiady:** `www.planetarium.edu.pl/oa.htm`.

**10.** Zawody II stopnia odbędą się **12 stycznia 2015 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 5 do 8 marca 2015 r.**

**11.** Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

**12.** O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

PLANETARIUM ŚLĄSKIE

## Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

**1.** Gwiazda znajdująca się w odległości $d = 25$ pc ma bolometryczną jasność obserwowaną $m = 8^{\mathrm{m}}$ i temperaturę efektywną $T = 4000$ K. W jej widmie linia odpowiadająca długości fali $\lambda$ wykazuje ekstremalne przesunięcia o $\pm\Delta\lambda$ (symetryczne poszerzenie linii), przy czym $|\Delta\lambda|/\lambda = 10^{-4}$. Zakładając, że oś obrotu gwiazdy jest prostopadła do kierunku widzenia, oblicz okres obrotu tej gwiazdy.

Jako dodatkowe dane liczbowe przyjmij bolometryczną jasność absolutną Słońca $M_{\mathrm{S}} = 4{,}75^{\mathrm{m}}$ i moc promieniowania Słońca $J_{\mathrm{S}} = 4 \cdot 10^{26}$ W.

**2.** Księżyc Jowisza Kallisto w czasie opozycji planety osiąga jasność obserwowaną $m_{\mathrm{K}} = 5{,}65^{\mathrm{m}}$; analogiczne wielkości dla Oberona (księżyca Urana) i Trytona (księżyca Neptuna) przyjmują odpowiednio wartości: $m_{\mathrm{O}} = 13{,}94^{\mathrm{m}}$ i $m_{\mathrm{T}} = 13{,}47^{\mathrm{m}}$. Wyznacz stosunki albedo Trytona do albedo Oberona oraz albedo Oberona do albedo Kalisto. Przyjmij następujące wartości promieni księżyców i promieni orbit planet: $r_{\mathrm{K}} = 2410$ km, $r_{\mathrm{O}} = 761$ km, $r_{\mathrm{T}} = 1350$ km, $d_{\mathrm{J}} = 5{,}203$ au, $d_{\mathrm{U}} = 19{,}19$ au, $d_{\mathrm{N}} = 30{,}06$ au.

**3.** Przypuśćmy, że w serwisach informacyjnych podano wiadomość o pojawieniu się na niebie gwiazdy supernowej, której jasność pozwala dostrzec ją nawet w dzień. Oblicz prawdopodobieństwo, że w Twojej miejscowości gwiazda ta może się znaleźć ponad horyzontem astronomicznym, przyjmując losowość jej położenia na sferze niebieskiej.

**4.** Dla wstępnej segregacji dużej już liczby danych o planetach pozasłonecznych, pod kątem ich podobieństwa do Ziemi, wprowadzono wskaźnik ESI (*Earth Similarity Index*). Określa on stopień podobieństwa planety do Ziemi, w skali od 0 (brak jakiegokolwiek podobieństwa) do 1 (identyczność z Ziemią). Korzystając z wiarygodnych źródeł internetowych znajdź wzór, którym ESI jest wyrażane i krótko go omów.

Na podstawie znalezionego wzoru oblicz zakres wartości ESI w grupie skalistych planet Układu Słonecznego i porównaj go z wartościami wskaźnika w grupie planet olbrzymów. Otrzymane wyniki porównaj z wartościami tego wskaźnika obliczonymi dla potwierdzonych składników układu planetarnego wokół gwiazdy Gliese 581.

**Termin przesłania rozwiązań zadań pierwszej serii upływa 13.10.2014 r.**

## Zadania obserwacyjne

*Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.*

**1.** Nad zachodnim fragmentem horyzontu wykonaj zdjęcie nieba w okolicy Arktura ($\alpha$ Boo) tak, by na fotografii widoczny był również fragment widnokręgu. Dowolną metodą, np. posługując się programem *Stellarium*, możliwie dokładnie wykreśl na swoim zdjęciu linię horyzontu astronomicznego.

**2.** Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji, prowadzonych w ostatnim roku.

### Internetowe zadanie obserwacyjne

**3.** Kamerą typu „rybie oko”, w Obserwatorium Astronomicznym Uniwersytetu Pedagogicznego na Suhorze (20,0° E; 49,5° N), wykonywane są zdjęcia nieba, na bieżąco umieszczane pod internetowym adresem: `www.as.up.krakow.pl/images/allsky/allsky.php`. W lewym górnym rogu każdego zdjęcia podane są: data i moment jego wykonania oraz czas naświetlania, a w lewym dolnym rogu – kolejny numer zdjęcia.

Na wydruku wybranego zdjęcia zaznacz punkty przecięcia siatki układu horyzontalnego o współrzędnych $(A, h)$, przy czym $A = n \cdot 30^\circ$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 11$; zaś $h = n \cdot 30^\circ$ dla $n = 0, 1, 2, 3$. Na tym samym wydruku zaznacz punkty kardynalne horyzontu oraz podaj współrzędne horyzontalne widocznych na zdjęciu planet i pięciu najjaśniejszych gwiazd.

**Termin przesłania zadania obserwacyjnego upływa 17.11.2014 r.**

*Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej*

**Zalecana literatura**

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba.
- Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Astronomia* oraz inne periodyki popularno-naukowe.
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.

# LXIV Olimpiada Fizyczna

## Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

**część I – do 10 października br.**

**część II – do 14 listopada br.**

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej `http://www.kgof.edu.pl`.

## Krótka informacja na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzyście i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestię metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

## Część I (termin wysyłania rozwiązań – 10 października 2014 r.)

**Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię, adres e-mail oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.**

**Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź (nawet jeśli w treści zadania znajdują się odpowiedzi do wyboru, uzasadnienie jest wymagane). Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.**

**1.** W cylindrycznym naczyniu z wodą pływa piłka. Przez równomiernie rozłożone małe otwory w dnie naczynia zaczęto tłoczyć powietrze.

Jak zmieni się zanurzenie piłki (średnie, bo oczywiście wydobywające się bąbelki powietrza powodują, że powierzchnia cieczy nie jest równa): wzrośnie (a być może nawet piłka utonie), nie zmieni się, czy może zmaleje?

**2.** Kołu rowerowemu nadano prędkość obrotową, tak że bieżnik przesuwa się z prędkością $v_0$. Następnie postawiono je na poziomej, szorstkiej powierzchni. Jaka będzie końcowa prędkość ruchu postępowego koła?

Przyjmij, że cała masa koła jest skupiona na jego obwodzie.

Pomiń opór powietrza oraz tarcie toczne i przyjmij, że koło nie zmienia kierunku ruchu oraz, że pozostaje w płaszczyźnie pionowej.

**3.** W jakiej odległości od brzegu jeziora powinien znajdować się wędkarz o wysokości $h$, aby pływająca w tym jeziorze rybka nie mogła go zobaczyć?

Powierzchnia wody jest idealnie płaska. Pomiń krzywiznę Ziemi.


Rys. 1

**4.** Leszek twierdzi, że jeśli wędkarz znajduje się w odległości od brzegu nieco większej niż $h\frac{n}{\sqrt{1-n^2}}$, gdzie $h$ jest wysokością ust wędkarza ponad poziomem wody, a $n = \frac{v_p}{v_w}$ ($v_p \approx 340$ m/s – prędkość dźwięku w powietrzu, $v_w \approx 1500$ m/s – prędkość dźwięku w wodzie) to nawet mała rybka płynąca tuż przy brzegu, tuż pod powierzchnią wody nie słyszy, co on mówi. Kasia natomiast twierdzi, że tak by było, gdyby można było pominąć falowe własności dźwięku, a w tym przypadku nie jest to słuszne. Kto ma rację?

**5.** Mamy przejechać wózkiem sklepowym przez wysoki próg. W którym przypadku możemy działać mniejszą siłą – w sytuacji a), czy w sytuacji b) (patrz rysunek 1)? Wózek jest równomiernie załadowany zakupami.

**6.** Marek ma aparat fotograficzny i dwa obiektywy do niego: pierwszy o ogniskowej $f = 17$ mm i liczbie $F$ (stosunek ogniskowej do średnicy otworu, przez który wpada światło) równej 2,8 oraz drugi o ogniskowej $f = 14$ mm i liczbie $F = 3{,}5$.

Marek chce zrobić zdjęcie grupie przyjaciół w dość ciemnym pomieszczeniu. Którego obiektywu powinien użyć, aby na matrycę aparatu padło (w ustalonym czasie) jak najwięcej światła? Marek zamierza dostosować odległość od przyjaciół do użytego obiektywu tak, by wielkość osób na zdjęciu była taka sama. Przyjaciele stoją obok siebie w jednej linii prostopadłej do osi optycznej aparatu.

**7.** W adiabatycznie izolowanym pojemniku znajduje się 1 kg pary wodnej o temperaturze 100°C i ciśnieniu normalnym. Do tego pojemnika wrzucono 1 kg lodu o temperaturze 0°C. Wyznacz temperaturę w pojemniku po ustaleniu się stanu równowagi.

Objętość pojemnika zmienia się tak, by ciśnienie w jego wnętrzu pozostało stałe.

**8.** Ania kupiła sobie soczewkę Fresnela (co to jest soczewka Fresnela, wyszukaj w dostępnych Ci źródłach), aby móc przeczytać tekst napisany drobnym drukiem. Przyglądając się soczewce zauważyła, że widzi w niej odbity, pomniejszony obraz okna znajdującego się za nią. Gdy obróciła soczewkę, zauważyła, że również widzi pomniejszony obraz okna, ale tym razem jest on odwrócony. Wyjaśnij, dlaczego tak się dzieje.

*Uwaga*: w soczewce można też zobaczyć niepomniejszone odbicie okna, ale tylko z jednej jej strony.

**9.** W sześciu nieskończonych, równoległych i cienkich przewodach płyną prądy o natężeniu $I$, przy czym w pięciu w tę samą stronę, a w szóstym w przeciwną. Przewody tworzą krawędzie graniastosłupa prawidłowego o podstawie sześciokąta foremnego o boku $a$. Jaka jest indukcja magnetyczna $B$ na osi układu (w równej odległości od każdego z przewodów)?

**10.** Rozważmy wahadło sferyczne, tzn. małe ciało zawieszone na nitce. Przy małych odchyleniach od położenia równowagi drgania w prostopadłych kierunkach są drganiami harmonicznymi o tej samej częstości i dlatego pionowy rzut toru na płaszczyznę poziomą jest w krzywą zamkniętą zbliżoną do elipsy. Jeśli jednak amplituda drgań w jednym z prostopadłych kierunków będzie wystarczająco duża, drgania w tym kierunku przestaną być harmoniczne i tor nie będzie już krzywą zamkniętą. W pierwszym przybliżeniu ruch będzie można opisać jako złożenie ruchu po krzywej przypominającej wydłużoną elipsę oraz ruchu obrotowego tej krzywej. W którą stronę będzie się obracać ta „wydłużona elipsa" (patrzymy z góry)?

**11.** Wyobraźmy sobie, że powierzchnia Księżyca została zalana wodą (oceanem). Czy na takim odmienionym Księżycu będą występowały przypływy i odpływy? A jeśli tak, to jak często w danym punkcie na Księżycu będzie przypływ?

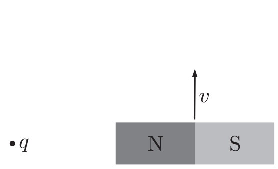
Zakładamy, że na Księżycu powstała również atmosfera gwarantująca właściwe ciśnienie i temperaturę (pozostawanie wody w stanie ciekłym).

**12.** Malarz stojący na szczycie długiej, ciężkiej drabiny zachwiał się i drabina zaczęła się przewracać. Malarz chce zminimalizować skutki upadku (zmniejszyć swoją prędkość w chwili zetknięcia z ziemią) i rozważa dwie możliwości:

a) Natychmiastowe zeskoczenie z drabiny.
b) Trzymanie się drabiny aż do momentu uderzenia w ziemię.

Która z nich jest lepsza?

Przyjmij, że drabina nie ślizga się po podłożu i nie odrywa od niego. Dla uproszczenia możesz też przyjąć, że masa drabiny jest równomiernie rozłożona na całej jej długości, lub że cała masa drabiny jest skupiona w jej środku.




Rys. 2

**13.** W pobliżu spoczywającego, dodatniego ładunku $q$ przesuwa się magnes – patrz rysunek 2. Czy na ładunek działa jakaś siła pochodząca od magnesu, a jeśli tak, to jak jest skierowana?

**14.** Do lekkiego pręta długości $l$ przymocowano na jednym końcu małą, ale ciężką kulkę. Żongler chce utrzymać pręt w pozycji w przybliżeniu pionowej po postawieniu go na dłoni i w tym celu może wykonywać tylko poziome ruchy ręką. Jak będzie mu łatwiej wykonać zadanie:

a) gdy kulka będzie znajdowała się na górze,
b) gdy kulka będzie znajdowała się na dole?

**15.** Pomiędzy dwiema dużymi, równoległymi płytami jest próżnia. Pierwsza płyta ma temperaturę $T_1$, a druga temperaturę $T_2$, przy czym $T_1 > T_2$. Mamy dwa rodzaje farb: $X$ i $Y$. Gdy płytę pomalujemy farbą $X$, będzie się ona zachowywać jak ciało doskonale szare o współczynniku emisji (względnej zdolności emisyjnej – patrz definicja ciała doskonale szarego poniżej) $A_X$, a gdy pomalujemy ją farbą $Y$, będzie się ona zachowywać jak ciało doskonale szare o współczynniku emisji $A_Y$, przy czym $A_X > A_Y$.

Którą płytę powinniśmy pomalować farbą $X$, a którą farbą $Y$, aby przepływ ciepła od płyty cieplejszej do chłodniejszej był mniejszy? A może ten wybór nie ma znaczenia?

Moc promieniowania fragmentu o powierzchni $\Delta S$ ciała doskonale szarego jest określona wzorem $P_{\Delta S} = A \cdot \Delta S \cdot \sigma T^4$, gdzie $T$ jest temperaturą powierzchni w skali Kelvina, $\sigma$ – stałą Stefana–Boltzmanna, a $A$ – pewną stałą (współczynnikiem emisji lub względną zdolnością emisyjną) z zakresu od 0 do 1 charakteryzującą powierzchnię. Jednocześnie ciało doskonale szare pochłania ułamek równy $A$ padającego na nie promieniowania, a odbija (rozprasza) całą resztę.

## Część II (termin wysyłania rozwiązań – 14 listopada 2014 r.)

**Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię, adres e-mail oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.**

### Zadania teoretyczne

**Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.**

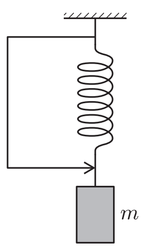
**T1.** Zorganizowano „Zawody w podskokach narciarskich" dla początkujących narciarzy. Zawody odbywają się na górze o kształcie danym wzorem

$$y = \begin{cases} B \cdot x^2 & \text{dla } x \leqslant 0, \\ -B \cdot x^2 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

gdzie $y$ jest składową pionową, $x$ – składową poziomą, a $B$ – stałą. Rozbieg zaczyna się na stoku w punkcie $y = H$, a zawodnicy wybijają się w punkcie $y = 0$. Wiadomo, że najlepsi zawodnicy potrafią się wybić na wysokość $y = h$. Niech $l$ oznacza poziomą długość skoku, tzn. miejscem lądowania skoczka jest $x = l$, $y = -Bl^2$.

Wyznacz zależność długości skoku $l$ najlepszego skoczka od wysokości rozbiegu $H$.

Pomiń wpływ powietrza na ruch skoczka (początkujący narciarze jeżdżą wolno).




Rys. 3. Ciężarek zawieszony na sprężynce. Strzałką oznaczono bezoporowy styk ślizgowy, pozwalający ciężarkowi poruszać się wzdłuż osi pionowej bez tarcia.

**T2.** Na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości $k$ i długości swobodnej $l_0$ wisi ciężarek o masie $m$ (patrz rysunek 3). Sprężyna jest wykonana z cienkiego drutu o zerowym oporze tworzącego zwojnicę o liczbie zwojów $n$ ($n \gg 1$), nawiniętą na powierzchni walcowej i zwartą zewnętrznym odcinkiem tego drutu. Promień walca jest równy $r$, przy czym $r \ll l_0$. Przyspieszenie ziemskie wynosi g.

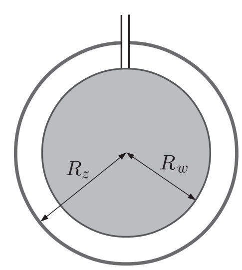
Ciężarek odciągnięto w dół, tak że sprężyna osiągnęła długość $l_1$. Natężenie prądu w zwojnicy wynosiło w tym momencie $I_1$. Puszczono ciężarek. Jaka będzie długość $l_2$ sprężyny w chwili zatrzymania się ciężarka w górnym położeniu i ile będzie wynosiło w tej chwili natężenie prądu $I_2$?

Podaj wyniki liczbowe dla $k = 50$ N/m, $l_0 = 20$ cm, $m = 0{,}3$ kg, $n = 50$, $r = 2$ cm, $\mathrm{g} = 9{,}8$ m/s$^2$, $l_1 = 30$ cm, $I_1 = 200$ A.

*Wskazówki*:

1. Zwoje solenoidu wzajemnie się przyciągają, dlatego na końce solenoidu działa siła skierowana wzdłuż jego osi. Dla długiego solenoidu bez rdzenia, w którym płynie prąd $I$, siła ta jest równa
$$F_I = \frac{\mu_0 S}{2}\left(\frac{In}{l}\right)^2,$$
gdzie $S$ – pole przekroju solenoidu.
2. W przypadku zamkniętego obwodu o oporze zerowym, strumień indukcji magnetycznej $B$ przez ten obwód jest stały w czasie (w przeciwnym przypadku w obwodzie indukowałaby się niezerowa siła elektromotoryczna, a to wobec zerowego oporu powodowałoby przepływ prądu o nieskończenie wielkim natężeniu).

**T3.** Skroplony gaz jest przechowywany w naczyniu (termosie) składającym się z naczynia wewnętrznego w kształcie kuli o promieniu $R_w$ i naczynia zewnętrznego w kształcie powłoki kulistej o promieniu wewnętrznym $R_z$ – patrz rysunek 4. Środki geometryczne obu naczyń się pokrywają, a między nimi panuje próżnia.




Rys. 4. Przekrój termosu.

Przyjmij, że naczynie zewnętrzne promieniuje jak ciało doskonale czarne, natomiast naczynie wewnętrzne – jak ciało doskonale szare: moc promieniowania jego fragmentu o powierzchni $\Delta S$ jest określona wzorem $P_{\Delta S} = A \cdot \Delta S \cdot \sigma T^4$, gdzie $T$ jest temperaturą powierzchni w skali Kelvina, $\sigma$ – stałą Stefana-Boltzmanna, a $A$ – pewną stałą (współczynnikiem emisji lub względną zdolnością emisyjną) z zakresu od 0 do 1 charakteryzującą powierzchnię. Jednocześnie ciało doskonale szare pochłania ułamek równy $A$ padającego na nie promieniowania, a odbija (rozprasza) całą resztę.

a) Wykaż, że jeśli całkowita moc promieniowania wysyłanego do wewnątrz przez naczynie zewnętrzne wynosi $P$, to moc promieniowania padającego na naczynie wewnętrzne wynosi $PS_w/S_z$, gdzie $S_w$ jest powierzchnią wewnętrznego naczynia, a $S_z$ – wewnętrzną powierzchnią zewnętrznego naczynia.

Wewnętrzne naczynie całkowicie wypełniono skroplonym gazem o gęstości $\rho$, temperaturze $T_w$ (równej temperaturze wrzenia) i cieple parowania $c_p$. Temperatura otoczenia wynosi $T_z$.

b) Wyznacz czas $t$, po jakim cała ciecz w naczyniu odparuje.

*Uwaga*: Wewnętrzne naczynie jest połączone cienką, pionową rurką z otoczeniem. Przez tę rurkę można nalewać lub wylewać ciecz i przez nią para może się wydostawać na zewnątrz. Ta rurka nie ma wpływu na ilość ciepła dopływającego do naczynia.

Przyjmij, że temperatura zewnętrznego naczynia jest równa temperaturze otoczenia, a wewnętrznego – temperaturze skroplonego gazu.

Podaj wynik liczbowy dla $R_w = 0{,}2$ m, $R_z = 0{,}3$ m, $T_z = 300$ K, $T_w = 7$ K, $\rho = 807$ kg/m$^3$, $c_p = 198$ kJ/kg.

**T4 (zadanie numeryczne).** Dla większości sprężyn siła sprężystości jest proporcjonalna do wydłużenia jedynie w przybliżeniu – bardzo dobrym dla małych wydłużeń, ale gorszym dla dużych. Dokładniejszym opisem tej zależności może być przyjęcie, że siła jest sumą wyrazu proporcjonalnego do wydłużenia sprężyny $r$ oraz wyrazu proporcjonalnego do kwadratu wydłużenia $r^2$:

$$F = -kr - br^2.$$

Przyjmijmy, że jeden koniec sprężyny jest unieruchomiony w początku układu współrzędnych $x$-$y$, a do drugiego przymocowano ciało o masie $m$. Ponadto zakładamy, że sprężyna jest nieważka, siła $F$ jest jedyną siłą działającą na to ciało, a także, że długość swobodnej (nierozciągniętej) sprężyny można pominąć w porównaniu z wydłużeniem.

W chwili początkowej $t = 0$, $x = x_0$, $y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_{y0}$.

Wyznacz numerycznie tory ruchu tego ciała w przedziale czasu od 0 do 100 s i przedstaw je graficznie dla następujących wartości stałych: $m = 1$ kg, $k = 1$ N/m, $x_0 = 0{,}5$ m, $v_{y0} = 2$ m/s oraz $b$ równych: 0, 0,1 N/m$^2$, $-0{,}1$ N/m$^2$, 0,2 N/m$^2$, $-0{,}2$ N/m$^2$.

*Uwaga*: Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem, jeśli nie są to wzory podane w treści zadania), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników, wykres toru (dokładnie dla czasu podanego w treści zadania) dla każdej z podanych wartości $b$ oraz jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

## Zadania doświadczalne

**Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.**

**D1.** Masz do dypozycji:

- plastikową buteleczkę o pojemności 20–50 ml,
- elektroniczny termometr z czujnikiem na kablu,
- wodę demineralizowaną,
- zamrażarkę,
- zegarek,
- folię aluminiową, taśmę klejącą.

Wyznacz ciepło właściwe lodu.

*Wskazówki*:

1. W otoczeniu o temperaturze $T_0$, temperatura $T$ przedmiotu pozostawionego w tym otoczeniu wynosi w chwili $t$
$$T = T_0 + \Delta T_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau},$$
gdzie $\Delta T_0$ jest różnicą temperatur przedmiotu i otoczenia w chwili $t = 0$, $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ oznacza podstawę logarytmu naturalnego; $\tau = \alpha \cdot c \cdot m$, $c$ – ciepło właściwe przedmiotu, $m$ – masa przedmiotu, $\alpha$ – pewna stała związana z kształtem i rodzajem powierzchni przedmiotu.
2. Ciepło właściwe wody wynosi $c_\mathrm{W} = 4200$ J/(kg · K).

**D2.** Celem doświadczenia jest zbadanie spadania magnesu w pobliżu pionowej powierzchni, do której magnes jest przyciągany. Masz do dyspozycji:

- magnes neodymowy w kształcie kulki o średnicy 5 mm,
- płaską, pionową powierzchnię (np. stalowe drzwi, bok metalowej szafki, drzwi lodówki, itp.),
- papier milimetrowy i linijkę,
- taśmę klejącą,
- książki o różnej grubości.

1. Wyznacz czas $t$ spadania magnesu od momentu jego puszczenia do chwili przylgnięcia do powierzchni, w zależności od początkowej odległości $d$ magnesu od tej powierzchni. Pomiary wykonaj dla możliwie szerokiego zakresu początkowych odległości.
2. Jeżeli siła przyciągania magnesu do powierzchni jest proporcjonalna do $1/d^k$ (gdzie $k$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą), to czas $t$ jest w przybliżeniu proporcjonalny do $d^{(k+1)/2}$. Na podstawie przeprowadzonego eksperymentu wyznacz wartość $k$.

Przyspieszenie ziemskie wynosi $\mathrm{g} = 9{,}81$ m/s$^2$. W rozważanej sytuacji wpływ prądów indukowanych na ruch magnesu jest zaniedbywalny.

*Uwagi*:

- Połknięcie magnesu może być bardzo niebezpieczne!
- Jeżeli nie masz możliwości zdobycia takiego magnesu, do 31 października 2014 r. przyślij na adres KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkiem.

**D3.** Pilot do telewizora steruje odbiornikiem za pośrednictwem wiązki niewidzialnego dla oka ludzkiego promieniowania podczerwonego. Mając do dyspozycji

- pilot do telewizora,
- cyfrowy aparat fotograficzny (np. kamerę internetową, aparat w telefonie),
- płytę CD o pojemności 700 MB,
- taśmę klejącą i plastelinę,
- linijkę, papier milimetrowy i nożyczki,

wyznacz długość fali promieniowania podczerwonego wytwarzanego przez pilot. Przyjmij, że odległość między ścieżkami na płycie CD wynosi $d = 1{,}55 \pm 0{,}05$ µm.

*Wskazówka*: Wybierz aparat, który jest czuły na promieniowanie podczerwone, tzn. może je „zobaczyć”, kiedy skieruje się na niego wiązkę z pilota.

# LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**30 września 2014 r. – I seria**,
**3 listopada 2014 r. – II seria**,
**1 grudnia 2014 r. – III seria**

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`.

**Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej**

- Dla województwa pomorskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:
  Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

## Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

**I seria**
(1 września 2014 r. – – 30 września 2014 r.)

**1.** Dane są takie liczby całkowite $a$, $b$ i $c$ różne od zera, że liczba
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$
jest całkowita. Wykazać, że iloczyn $abc$ jest sześcianem liczby całkowitej.

**2.** Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=s<2n.$$
Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**3.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant 1$, że liczba
$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$
jest wymierna.

**4.** Dany jest trójkąt ostrokątny $ABC$, w którym $AB \neq AC$. Punkty $E$ i $F$ są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków $B$ i $C$. Punkty $M$ i $N$ są środkami odpowiednio odcinków $BC$ i $EF$, a punkt $Q$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $AMN$. Dowieść, że proste $AQ$ i $BC$ są równoległe.

**II seria**
(1 października 2014 r. – – 3 listopada 2014 r.)

**5.** Rozwiązać w liczbach całkowitych $x$ i $y$ równanie
$$x^4-2x^3+x=y^4+3y^2+y.$$

**6.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym kąt przy wierzchołku $C$ jest prosty. Punkt $D$ jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $C$, a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków $AB$ i $AC$ odpowiednio w punktach $E$ i $F$. Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta $AEF$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ACD$.

**7.** Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery $s$ wpisanej w ten czworościan ze ścianami $ABD$, $BCD$ i $ACD$ przecina krawędzie $AD$, $BD$ i $CD$ odpowiednio w punktach $A'$, $B'$ i $C'$. Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze $s$.

**8.** Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą $k$ o następującej własności:
Wśród dowolnych $k$ różnych podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

**III seria**
(4 listopada 2014 r. – – 1 grudnia 2014 r.)

**9.** Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ spełniają równość $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. Udowodnić, że
$$\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cdot\Big(1+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min\{x_i,x_j\}\Big)\geqslant 1.$$

**10.** Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $c$ i $d$, że dla każdej liczby naturalnej $n$ liczba $an+b$ jest podzielna przez liczbę $cn+d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna $k$, dla której $a=kc$ i $b=kd$.

**11.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $BC<CA<AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków $BC$, $CA$ i $AB$ odpowiednio w punktach $D$, $E$ i $F$, a punkty $K$, $L$ i $M$ są środkami odpowiednio boków $BC$, $CA$ i $AB$. Proste $DE$ i $KL$ przecinają się w punkcie $P$, a proste $DF$ i $KM$ – w punkcie $Q$. Dowieść, że punkty $A$, $P$ i $Q$ leżą na jednej prostej.

**12.** Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka $v$ dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek $v$. Rozstrzygnąć, który z graczy – rozpoczynający grę czy jego przeciwnik – ma strategię wygrywającą.