Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

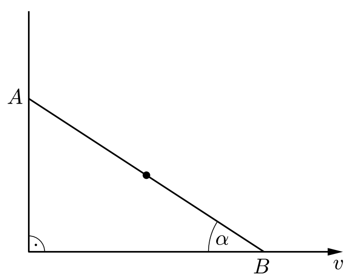
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 582, 583

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

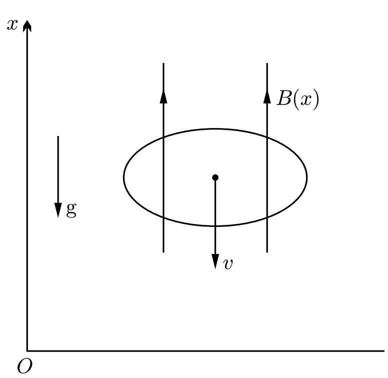
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2014

582. W środku nieważkiego pręta o długości $2l$ przyczepiona jest mała kulka o masie m. Pręt porusza się jak na rysunku 1. Koniec B pręta porusza się w kierunku poziomym ze stałą prędkością v, koniec A porusza się wzdłuż pionowej ściany. Jaką siłę reakcji wywiera pręt na kulkę, gdy tworzy z poziomem kąt $\alpha = \pi/4$?



Rys. 1

583. Metalowy pierścień o promieniu l i oporze R spada pod działaniem siły ciężkości w polu magnetycznym. Wartość wektora indukcji magnetycznej w kierunku pionowym zmienia się z wysokością zgodnie ze wzorem $B(x) = B_0(1 - \alpha x)$, gdzie stała α jest dodatnia (rys. 2). Znaleźć zależność siły hamującej ruch pierścienia od jego prędkości. Płaszczyzna pierścienia pozostaje prostopadła do linii pola magnetycznego.

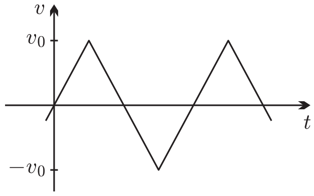


Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

578. Ciało znajduje się na desce nachylonej pod kątem α do poziomu. Deska wykonuje podłużne oscylacje: jej prędkość zmienia się z dużą częstością w sposób przedstawiony na rysunku 3. Znaleźć średnią prędkość ciała, wiedząc, że amplituda zmian prędkości wynosi v_0, a współczynnik tarcia ciała o deskę jest równy μ.



Rys. 3

579. Reakcja jądrowa ${}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{17}\mathrm{O} + {}^{1}p$ może zachodzić, gdy energia kinetyczna cząstek α padających na nieruchome jądra azotu przewyższa energię progową $E_p = 14{,}5$ MeV. O ile energia kinetyczna cząstek α musi przewyższać energię progową, aby powstające w wyniku reakcji protony miały zerową prędkość?

578. Deska drga z przyspieszeniem o wartości $a = \frac{4v_0}{T}$, gdzie T jest okresem drgań, a zwrot wektora przyspieszenia zmienia się co pół okresu. W układzie związanym z deską na ciało działa wzdłuż deski składowa siły ciężkości $mg\sin\alpha$, siła bezwładności ma o zmiennym zwrocie oraz siła tarcia o wartości $\mu mg\cos\alpha$. Ponieważ średnia prędkość ciała względem deski jest stała, musi ono przez pewną część okresu poruszać się w górę deski. Oznaczmy ten czas przez t_1. W czasie okresu pęd ciała nie ulega zmianie:
$\Delta p = 0 = mgT\sin\alpha + \frac{maT}{2} - \frac{maT}{2} + \mu mgt_1\cos\alpha - \mu mgt_2\cos\alpha$, gdzie $t_2 = T - t_1$. Stąd $t_2 - t_1 = \frac{T\operatorname{tg}\alpha}{\mu}$. Niech v_1 oznacza maksymalną prędkość klocka względem deski skierowaną w górę, a v_2 maksymalną prędkość skierowaną w dół. $v_1 = a_1t_1$, gdzie $a_1 = a + \mathrm{g}\sin\alpha + \mu\mathrm{g}\cos\alpha$, $v_2 = a_2t_2$, gdzie $a_2 = a + \mathrm{g}\sin\alpha - \mu\mathrm{g}\cos\alpha$. Ponieważ deska drga z dużą częstotliwością $a \approx a_1 \approx a_2$. Ustalona średnia prędkość ciała
$v = \frac{v_2 - v_1}{2} = \frac{a(t_2 - t_1)}{2} = \frac{v_0\operatorname{tg}\alpha}{\mu}$.

579. W rozważanej reakcji energia jest pochłaniana, czyli energia reakcji $Q = (m_{\mathrm{N}} + m_\alpha - m_{\mathrm{O}} - m_p)c^2$ jest ujemna. Podczas reakcji działają tylko siły wewnętrzne, zatem pęd całkowity układu nie zmienia się. W układzie środka masy, w którym pęd całkowity układu wynosi zero, minimalna energia kinetyczna równa jest energii pochłoniętej w reakcji: $|Q| = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{m_\alpha m_{\mathrm{N}} v^2}{2(m_\alpha + m_{\mathrm{N}})}$, gdzie v jest prędkością progową cząstki α: $E_{\mathrm{p}} = \frac{m_\alpha v^2}{2}$. Otrzymujemy stąd energię reakcji $Q = \frac{-14E_{\mathrm{p}}}{18}$. Oznaczmy przez v_α prędkość padającej cząstki α, a przez E_α jej energię kinetyczną, gdy powstające protony mają zerową prędkość. Z zasady zachowania pędu: $m_\alpha v_\alpha = m_{\mathrm{O}} v_{\mathrm{O}}$ oraz z zasady zachowania energii: $\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + Q = \frac{m_{\mathrm{O}} v_{\mathrm{O}}^2}{2}$ otrzymujemy energię kinetyczną padającej cząstki α: $E_\alpha = \frac{119E_{\mathrm{p}}}{117}$, która o 25 keV przewyższa energię progową.

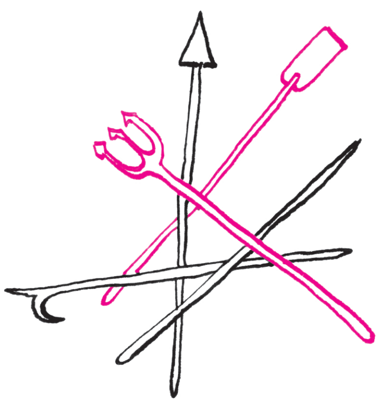
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 675 ($WT = 2{,}29$) i 676 ($WT = 1{,}94$) z numeru 2/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	44,04
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	39,50
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Andrzej Idzik, znany Czytelnikom *Delty* z różnych form aktywności, zamyka swoją drugą rundę.



Zadania z matematyki nr 685, 686

Redaguje Marcin E. KUCZMA

685. Niech $I = \langle 0;1\rangle$. Funkcje $f, g : I \to I$ spełniają warunki: f jest ściśle rosnąca, $f(g(x)) = x$ dla $x \in I$. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n
$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right) < n - \frac{1}{n}.$$

686. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których równanie $x^2 + y^2 = n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, różnych od zera, ale ma rozwiązania w liczbach wymiernych x, y, różnych od zera.

Zadanie 686 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa

Rozwiązania zadań z numeru 5/2014

Przypominamy treść zadań:

681. Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustalić, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

682. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek
$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$
Udowodnić, że
$$\frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$

681. Gdy na każdym stosie leży parzysta liczba bierek, wówczas każdy ruch powoduje, że liczność co najmniej jednego stosu stanie się nieparzysta. Z takiej sytuacji można jednym ruchem ponownie uzyskać stan: obie liczności parzyste. Można przy tym wybrać taki ruch, który zmniejsza łączną liczbę bierek w obu stosach (jedyny typ ruchu, który tego nie robi, to przełożenie bierki ze stosu na drugi – ale wtedy ten sam efekt parzystości można uzyskać, zdejmując po jednej bierce z obu stosów).

Stąd wynika, że stany typu *obie parzyste* to pozycje przegrywające; pozostałe pozycje są wygrywające. Istotnie, ze stanu pierwszego typu każdy ruch prowadzi do stanu drugiego typu; stąd zaś istnieje ruch, przywracający stan *obie parzyste* i zmniejszający łączną liczność (co gwarantuje, że gra się zakończy).

Dostajemy odpowiedź: gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską wtedy i tylko wtedy, gdy na starcie liczba bierek w co najmniej jednym stosie jest nieparzysta.

682. Można przyjąć, że $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Nierówność daną do udowodnienia przepisujemy w równoważnej postaci
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right) \geqslant n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$
Lewa strona nie zmieni się, gdy ją pomnożymy przez liczbę 1, zapisaną (zgodnie z założeniem) jako suma odwrotności liczb $x_i + 1$:
$$(*)\qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+1}\right) \geqslant n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{x_i}}.$$
Wystarczy teraz wykazać, że ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ o wyrazach
$$a_i = \sqrt{x_i} + \frac{1}{\sqrt{x_i}} = \frac{x_i+1}{\sqrt{x_i}}, \qquad b_i = \frac{1}{x_i+1}$$
są odwrotnie uporządkowane; nierówność Czebyszewa $\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right) \geqslant n\sum a_i b_i$ da wówczas dowodzoną tezę $(*)$.

Przyjęliśmy, że $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, więc ciąg (b_i) jest nierosnący; chcemy pokazać, że ciąg (a_i) jest niemalejący. Funkcja $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2}$ maleje w przedziale $(0;1\rangle$ oraz rośnie w przedziale $\langle 1;\infty)$. Zatem fragment ciągu (x_i), który leży w przedziale $\langle 1;\infty)$, wyznacza niemalejący fragment ciągu o wyrazach $a_i = f(x_i)$. Skoro jednak $\sum b_i = 1$, to w przedziale $(0;1\rangle$ może leżeć co najwyżej jeden wyraz ciągu (x_i), czyli liczba x_1. Pozostaje dowieść, że wówczas $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Z założenia $\sum b_i = 1$, więc $b_1 + b_2 \leqslant 1$, skąd (po prostym przekształceniu) $x_1x_2 \geqslant 1$. Stąd, ostatecznie,
$$f(x_2) - (x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} =$$
$$= \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}\right) \geqslant 0.$$
To kończy dowód nierówności $(*)$, równoważnej z tezą zadania.