Co najmniej, gdyż w tych obliczeniach zakładamy, że mamy pecha i otwieramy zawsze tę gorszą puszkę, więc w rzeczywistości będzie nawet nieco lepiej.

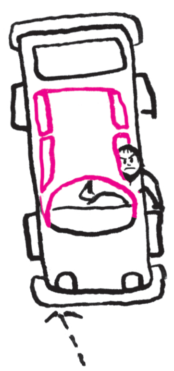
zyskujemy jedynie skończoną wartość. Tak jest i u nas. Nawet jeśli będziemy wybierali za każdym razem pierwszą puszkę, to wartość oczekiwana wyniesie co najmniej $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{8}\cdot 9+\frac{1}{16}\cdot 27+\ldots=\infty$. A jak będziemy kaprysili i zdecydujemy się na branie tej drugiej puszki, to nawet więcej. Zaraz, zaraz. Więcej niż nieskończoność? O ile?

No właśnie! Nieskończoności nie da się przeskoczyć. Tu mamy do czynienia z nieintuicyjnym pojęciem nieskończonej wartości oczekiwanej. W ujęciu bliskim kawalerowi de Méré po prostu mamy do czynienia z sytuacją, w której zapytani, jaką sumę bylibyśmy w stanie zapłacić, aby w taką grę sobie zagrać, powinniśmy odpowiedzieć: **każdą**. Ciekawe, że gdy psychologowie badali ten aspekt, okazało się, że ludzie nie byli tacy przekonani o opłacalności takiej gry i średnio deklarowali kilkadziesiąt zł.

Mówimy tu o wyidealizowanej sytuacji, w której zakładamy nieograniczoną wypłacalność drugiej strony – w rzeczywistości założenie niezbyt realne.

Opisywany eksperyment dotyczył nieco uproszczonej wersji, oryginalnie badanej przez D. Bernoulliego, w której nie było dwóch puszek, tylko po prostu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$ wygrywało się 2^n zł. Łatwo sprawdzić, że wartość oczekiwana jest tu też nieskończona. W opisywanym doświadczeniu średnia wartość deklarowanej stawki do zaakceptowania przez pytanych wyniosła 25. [Ian Hacking, *Strange expectations*, Philosophy of Science 47 (1980), nr 4, 562–567.]

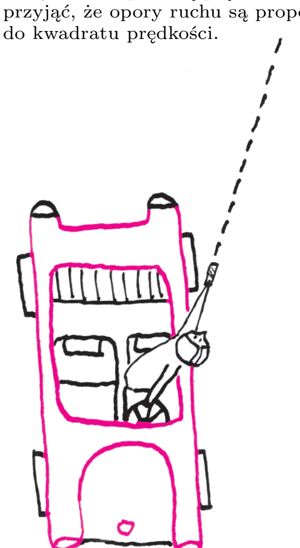
Warto dodać, że Pascal pojęcie nieskończonej wartości oczekiwanej rozumiał na wiele lat przed Bernoullim. Oparł na nim swój słynny zakład. W obliczu nieskończonej szczęśliwości w przyszłym życiu oferowanej przez Boga nie należy kombinować, tylko po prostu żyć zgodnie z przykazaniami. Żadna wartość w doczesnym, skończonym życiu nie zrekompensuje nam braku wiecznego szczęścia. Nie mówiąc już o nieskończonej ujemnej wartości oczekiwanej, jeśli przydarzyłoby się nam przegrać na Sądzie Ostatecznym. Zostawmy może te rozważania teologom, a na własny użytek raczej omijajmy kolektury Lotto, bo tam oczekiwana wartość wygranej oscyluje wokół -50% opłaconej stawki. Więc jeśli nachodzi nas chęć wykupienia losu za 3 zł, to znacznie bardziej opłacalne jest wyrzucenie do kosza przy kolekturze, na przykład, złotówki. W długiej perspektywie wyjdziemy na tej strategii lepiej.



Fuzja Bonda

James Bond jest ścigany przez niegodziwego doktora No. Samochód Bonda rozwija maksymalną prędkość $v_0 = 100$ km/h, ale samochód doktora No rozwija nieco większą prędkość $u_0 = 101$ km/h. James Bond w szkole dla szpiegów słyszał o zasadzie zachowania pędu i postanawia ją wykorzystać – zaczyna strzelać do przeciwnika. Jego samochód wpada w poślizg (pomijamy tarcie i opory ruchu) i dzięki zjawisku odrzutu przyspiesza. Sprawdźmy, ile strzałów (przyjmując, że wciąż chybia) musi oddać James Bond, żeby uciec doktorowi No? Masa pocisku jest równa $m = 10\,\mathrm{g}$, a jego prędkość wylotowa to $w_0 = 400\,\mathrm{m/s}$. Masa samochodu Bonda wraz z pasażerem i amunicją wynosi $M = 1\,\mathrm{t}$.

Jeżeli Czytelnik Praktyczny uzna, że pominięcie oporów ruchu przy prędkości rzędu 100 km/h świadczy o kompletnym oderwaniu autora od rzeczywistości, może – pamiętając o tym, że ta sama cecha dotyczy filmów o agencie 007 – obliczyć, jak często Bond musi strzelać, by utrzymać bezpieczną prędkość. Można przyjąć, że opory ruchu są proporcjonalne do kwadratu prędkości.



Niech v_1 będzie prędkością samochodu Bonda po pierwszym wystrzale. Z zasady zachowania pędu wynika

$$Mv_0 = (M-m)v_1 - m(w_0 - v_0),$$

A stąd

$$v_1 = v_0 + \frac{m}{M-m}w_0.$$

Ze względu na ogromną różnicę mas pominiemy m w mianowniku ułamka w ostatnim równaniu. Powtarzamy to rozumowanie po każdym wystrzale. Po n strzałach Bond porusza się z prędkością

$$v_n = v_0 + n\frac{m}{M}w_0.$$

Bond musi strzelać tak długo, aż jego prędkość przekroczy u_0. To daje

$$n = \left\lceil \frac{u_0 - v_0}{w_0}\,\frac{M}{m} \right\rceil.$$

Podstawiając dane, otrzymujemy $n = 70$. A zatem lepiej chyba oddać celny strzał albo ścigać się na znacznie lżejszych sankach.

A czy doktor No może skorzystać z metody wymyślonej przez Bonda? Oczywiście, o ile będzie strzelał do tyłu.

Krzysztof REJMER