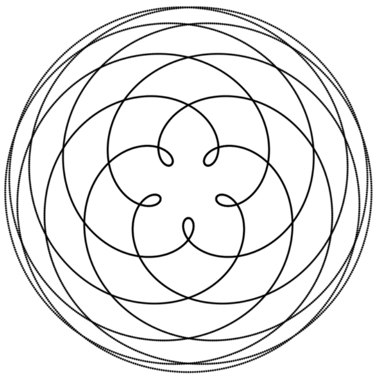
Wenus i pszczoły



Pentagram (róża) Wenus.

Co mają wspólnego starożytna bogini miłości i produkujące miód owady? Odpowiedzią jest *oczywiście* wspaniała złota proporcja, czyli specjalny podział odcinka, o którym ostatnio pisaliśmy w kontekście astronomicznym w numerze 1/2014. Opisany tam stosunek okresów orbitalnych Ziemi (⊕) i Wenus (♀) wyraża się za pomocą złotej proporcji, $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1{,}618033989\ldots$ i jest bliski $\varphi - 1$, czyli niemal 8/13. W związku z tym momenty koniunkcji tych planet wyznaczają prawie idealny pentagram, w rzeczywistości bowiem w ciągu 8 lat ziemskich Wenus okrąża Słońce 13,004 raza. Rysunek obok ilustruje rezonans w ruchach planet w nieco inny sposób: to orbita Wenus oglądana z układu odniesienia poruszającego się wraz z Ziemią. Jak widać, pentagram można „zakodować” również w znacznie mniej groźnie wyglądający es–flores, orbitalny kwiatek o pięciu płatkach.

Jaki jest jednak związek złotej proporcji z pszczołami? Okazuje się, że trutnie (♂) pochodzą z niezapłodnionych jajeczek, podczas gdy narodziny robotnicy (♀) wymagają udziału trutnia, który to zadanie spełnia tylko raz w życiu. Liczba robotnic w danym pokoleniu równa się zatem liczbie trutni z pokolenia poprzedniego, a także: liczba robotnic w danym pokoleniu jest równa liczbie robotnic w dwu poprzednich pokoleniach. Całkowita liczba pszczół w pokoleniu n jest równa liczbie ciągu Fibonacciego F_n, co obrazuje tabelka.

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, z $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
♂	1	0	1	1	2	3	5	8
♀	0	1	1	2	3	5	8	13
♀ + ♂	1	1	2	3	5	8	13	21

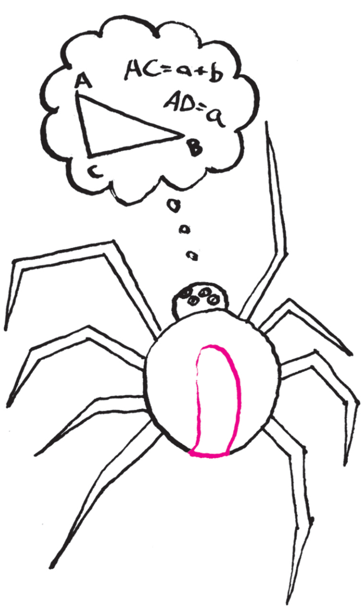
Liczba trutni i robotnic w pokoleniu n.

Złota proporcja φ wynika wprost z ciągu F_n przez $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ (co ciekawe, wartość granicy nie zależy od wartości początkowych ciągu, z wyjątkiem przypadku pary $F_1 = F_2 = 0$); asymptotyczna zależność została opisana przez Johannesa Keplera, obserwatora ruchów Wenus oraz pierwszego astronoma, który przewidział przejście planety przed tarczą Słońca (6 grudnia 1631 r.).

Michał BEJGER

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



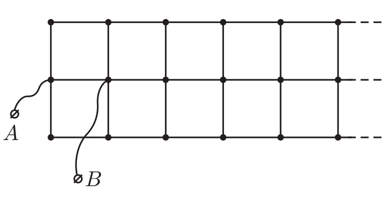
M 1429. Dane są liczby dodatnie a, b. Rozważmy trójkąty prostokątne ABC o kącie prostym przy wierzchołku C, dla których $AC = a + b$. Niech D będzie punktem na AC, dla którego $AD = a$, $DC = b$. Znaleźć długość boku BC, dla której kąt ABD jest maksymalny.
Rozwiązanie na str. 24

M 1430. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $n \geqslant k \geqslant 1$ liczba
$$\frac{\mathrm{NWD}(n,k)}{n}\binom{n}{k}$$
jest całkowita.
Rozwiązanie na str. 11

M 1431. Niech P będzie pewnym wielościanem. Udowodnić, że istnieje stała dodatnia $c(P)$ o następującej własności: jeśli pewnych n kul o sumie objętości V pokrywa wszystkie ściany (czyli każdy punkt każdej ściany P należy do co najmniej jednej z nich), to $n \geqslant \dfrac{c(P)}{V^2}$.
Rozwiązanie na str. 10

Przygotował Michał NAWROCKI

F 861. Kółko powstałe ze sprężyny o długości początkowej l, współczynniku sprężystości k i masie m, której końce połączono, wiruje z prędkością kątową ω wokół osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez jego środek. Jak zależy promień kółka R od prędkości ω? Przyjąć, że średnica zwojów sprężyny jest dużo mniejsza od jej długości.
Rozwiązanie na str. 16



F 862. Znaleźć oporność pomiędzy punktami A i B półnieskończonego obwodu, jeżeli oporność każdego z jego elementów wynosi R.
Rozwiązanie na str. 17