Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

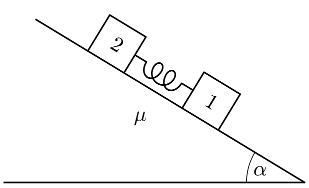
Rozwiązania zadań z numeru 4/2014

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

576. Z równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α zsuwają się dwa klocki o jednakowych masach m, połączone nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k (rys. 1). W chwili początkowej sprężyna jest nieodkształcona, a prędkości klocków są równe zeru. Współczynnik tarcia między drugim klockiem a równią wynosi μ, przy czym $\mu < \operatorname{tg}\alpha$. Między pierwszym klockiem a równią tarcia nie ma. Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny oraz inne wielkości charakteryzujące ruch klocków.

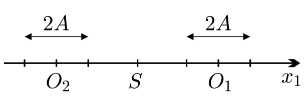
577. Na powierzchni długiego, nieprzewodzącego walca o promieniu R równomiernie rozłożony jest ładunek o gęstości powierzchniowej σ. Walec znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0, którego linie są równoległe do osi walca. Znaleźć prędkość kątową walca po wyłączeniu zewnętrznego pola magnetycznego. Walec ma jednorodną gęstość ρ.



Rys. 1

576. Ponieważ spełniony jest warunek $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, oba klocki ruszają jednocześnie. Środek masy układu porusza się z przyspieszeniem $a = g\sin\alpha - \frac{1}{2}\mu g\cos\alpha$. Dalej rozważać będziemy problem w układzie środka masy.

Masy klocków są jednakowe, zatem środek masy układu S znajduje się w połowie odległości między klockami, a ich ruch jest symetryczny względem środka masy. Możemy więc ograniczyć się do rozpatrzenia ruchu jednego z klocków. Wypadkowa siła, działająca na klocek pierwszy, wynosi $F_1 = mg\sin\alpha - kx = \frac{1}{2}\mu mg\cos\alpha - kx$, gdzie x jest odkształceniem sprężyny ($x > 0$, gdy sprężyna jest rozciągnięta). Gdy $F_1 = 0$, czyli w stanie równowagi, wydłużenie sprężyny jest równe $\Delta l = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{2k}$. Niech x_1 oznacza współrzędną pierwszego klocka względem położenia równowagi O_1 (patrz rys. 2). Możemy wtedy napisać $F_1 = \frac{1}{2}\mu mg\cos\alpha - k(\Delta l + 2x_1) = -2kx_1$. Klocki poruszają się więc względem środka masy ruchem harmonicznym z okresem $T = 2\pi\sqrt{2k/m}$. W chwili początkowej $x_1 = \Delta l/2$, zatem amplitudy drgań wynoszą $A = \dfrac{\mu mg\cos\alpha}{4k}$. Maksymalne wydłużenie sprężyny jest równe $x_{\max} = 4A$.



Rys. 2

577. Oznaczmy przez Δt czas, w którym następuje wyłączenie zewnętrznego pola magnetycznego. Zmiana strumienia tego pola przez powierzchnię przekroju poprzecznego walca powoduje powstanie stycznego do powierzchni walca pola elektrycznego, które działa na ładunek na powierzchni walca i wywołuje jego obrót. Z kolei poruszający się ładunek powierzchniowy wytwarza wewnątrz walca dodatkowe pole magnetyczne, które zgodnie z regułą przekory rośnie w czasie i skierowane jest zgodnie z polem B_0. Oznaczmy maksymalną wartość wektora tego pola przez B. Zgodnie z prawem Faradaya

$$K_E = 2\pi RE = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2(B_0 - B)}{\Delta t},$$

gdzie przez K_E oznaczyliśmy krążenie pola elektrycznego E wzdłuż okręgu o promieniu R otaczającego przekrój poprzeczny walca, a przez Φ_B strumień pola magnetycznego przez powierzchnię tego przekroju. Wartość indukowanego pola magnetycznego, gdy obracający się walec osiągnie końcową prędkość kątową ω wynosi $B = \mu_0 j$, gdzie $j = 2\pi R\sigma\omega$ jest natężeniem prądu na jednostkę długości walca. Średni moment siły zwiększający prędkość kątową walca w czasie Δt dany jest wzorem $M = QER$, gdzie $Q = 2\pi Rl\sigma$ jest całkowitym ładunkiem na powierzchni walca o długości l. Równanie ruchu obrotowego walca ma postać $I\dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = M$. Moment bezwładności pełnego walca to $I = \dfrac{\pi}{2}\rho R^4 l$, zaś $\Delta\omega = \omega$. Wstawiając natężenie pola E z prawa Faradaya do równania ruchu obrotowego, otrzymujemy szukaną prędkość kątową:

$$\omega = \frac{2\sigma B_0}{R(\rho + 2\mu_0\sigma^2)}.$$

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 673 ($WT = 1{,}64$) i 674 ($WT = 2{,}94$) z numeru 1/2014

Jędrzej Garnek	Poznań	47,96
Janusz Olszewski	Warszawa	45,91
Andrzej Idzik	Bolesławiec	42,10
Paweł Duch	Bielawa	40,84
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	37,56
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,36
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75

Pan Jędrzej Garnek – już po raz drugi. Zaś Janusz Olszewski stanie oto i za pięciu Weteranów.

Rozwiązania zadań z numeru 4/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

679. Na okręgu wybrano skończoną liczbę punktów i niektóre z nich oznaczono kolorem białym, a pozostałe czerwonym, tak, że punktów białych jest przeszło dwukrotnie więcej niż czerwonych. Dowieść, że istnieje taki punkt biały, że każdy łuk okręgu, mający koniec w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych.

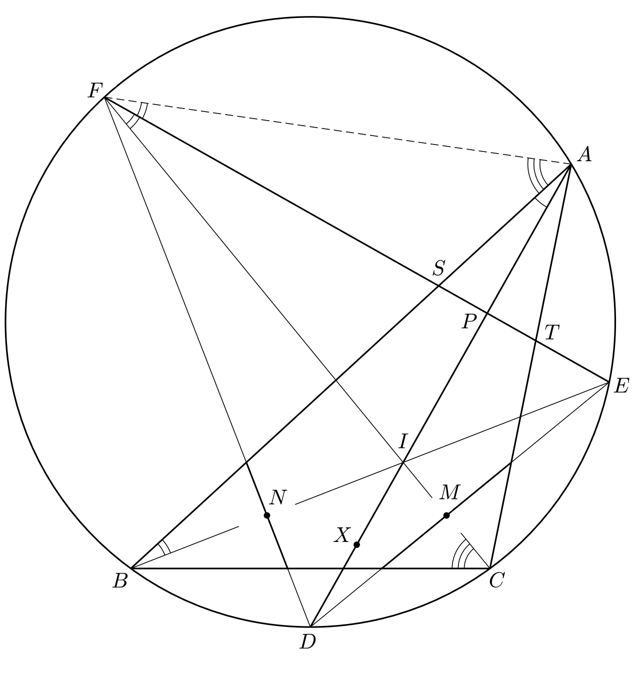
680. Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F. Odcinki prostych DE i DF, wyznaczone przez punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, mają środki w punktach M i N. Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie P. Wykazać, że środek okręgu, przechodzącego przez punkty D, M, N, leży na okręgu, przechodzącym przez punkty P, M, N.

679. Jeżeli wszystkie wybrane punkty są białe, nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że tak nie jest. Ustalmy kierunek obiegu (orientację) okręgu; każdy łuk ma wtedy początek i koniec.

Punkt biały nazwijmy *fajnym*, jeżeli każdy łuk okręgu, mający początek w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych. Wybierzmy dowolną parę punktów sąsiadujących, różnych kolorów, w której punkt biały jest wcześniejszy niż punkt czerwony (bezpośrednio go poprzedza). Usuńmy tę parę. Zauważmy, że wszystkie białe punkty, które nie były fajne, pozostają niefajnymi w nowej sytuacji.

Powtarzamy to postępowanie, dopóki czerwone punkty nie znikną. Przyjmijmy, że na starcie było b punktów białych oraz c czerwonych. Po wykonaniu c ruchów zostaje $b-c$ punktów, wszystkie białe, oczywiście fajne (w tej końcowej sytuacji). One zatem były fajne już na starcie; oznaczmy ich zbiór przez B.

Zmieniamy orientację i powtarzamy rozumowanie. Otrzymujemy zbiór B', złożony z $b-c$ białych punktów, które już na starcie były „fajne przy zmienionej orientacji”. Dla uzyskania tezy zadania należy wykazać, że pewien punkt biały znajduje się w części wspólnej zbiorów B i B'. Do tego wystarczy, żeby zachodziła nierówność $2(b-c) > b$, czyli $b > 2c$, a to jest dane w założeniu.



680. Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C, zaś przez S, T punkty przecięcia odcinka EF odpowiednio z bokami AB, AC. Odcinki AD, BE, CF przecinają się w punkcie I (środku okręgu wpisanego). Z równości

$$|\sphericalangle BAD| = \alpha/2,$$
$$|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle ABE| = \beta/2,$$
$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BCF| = \gamma/2$$

wynika, że w trójkącie APF kąty przy wierzchołkach A i F sumują się do kąta prostego. Zatem kąt przy wierzchołku P jest prosty. W trójkącie AST odcinek AP jest więc jednocześnie dwusieczną i wysokością; to znaczy, że punkt P jest środkiem odcinka ST.

Skoro $AP \perp PF$, równość

$$|\sphericalangle CFE| = |\sphericalangle CBE| = \beta/2 = |\sphericalangle AFE|$$

pokazuje, że prosta EF jest symetralną odcinka AI. Przez analogię, punkty M i N są środkami odcinków CI i BI, a proste DE i DF są symetralnymi tych odcinków. W takim razie jednokładność o środku I i skali $1/2$ przekształca trójkąt ABC na trójkąt PNM.

Okrąg opisany na pierwszym z tych trójkątów przechodzi na okrąg opisany na drugim. Obrazem punktu D jest środek X odcinka ID, który wobec tego leży na okręgu (PNM). Pozostaje zauważyć, że punkt X, jako środek przeciwprostokątnej trójkątów prostokątnych IMD, IND, jest też środkiem okręgu (DMN).