Choć proste to nieproste

Starożytni Egipcjanie sprzed 4000 lat uznawali tylko ułamki proste, czyli takie, które w liczniku miały jedynkę. Oczywiście, były też inne ułamki, ale o nich uczeni mówić nie chcieli – przedstawiali je jako sumę ułamków prostych. Nie byłoby w tym niczego nadzwyczajnego, gdyby nie pretensjonalne wymaganie, aby w owej sumie każdy ułamek był inny.

Czy każdy ułamek da się przedstawić jako suma różnych ułamków prostych? Tak, jest nawet bardzo prosty algorytm, pozwalający to zrobić: od ułamka należy odejmować największy jak się da ułamek prosty.

Zobaczmy to na przykładzie rozkładu $\frac{9}{19}$:

$$\frac{9}{19}-\frac{1}{3}=\frac{27-19}{57}=\frac{8}{57},\qquad \frac{8}{57}-\frac{1}{8}=\frac{64-57}{456}=\frac{7}{456},$$
$$\frac{7}{456}-\frac{1}{66}=\frac{462-456}{456\cdot 66}=\frac{6}{456\cdot 66}=\frac{1}{456\cdot 11}=\frac{1}{5016},$$

Zatem $\frac{9}{19}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{66}+\frac{1}{5016}$.

Patrząc na te rachunki, widzimy, że przy naszym algorytmie w każdym kroku licznik maleje o 1 (Czytelniku, udowodnij to!). Stąd widać, że algorytm ma własność stopu – jeśli w liczniku było k, to taki rozkład (a mogą być inne?) będzie zawierał co najwyżej k ułamków prostych.

Dla $\frac{2}{29}$ algorytm daje rozkład $\frac{1}{15}+\frac{1}{435}$, ale dobrym rozkładem jest też $\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$.

Widzimy jednak, że w pewnym momencie coś się skróciło i ułamków było mniej – nie 9, a tylko 4. I to się zdarza bardzo często już nawet dla małych liczników, np.

$$\frac{4}{13}-\frac{1}{4}=\frac{16-13}{52}=\frac{3}{52},$$
$$\frac{3}{52}-\frac{1}{18}=\frac{54-52}{52\cdot 18}=\frac{2}{52\cdot 18}=\frac{1}{52\cdot 9}=\frac{1}{468},$$

czyli $\quad \frac{4}{13}=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{468}$.

Badacze ułamków prostych, obserwując ich zachowanie, postawili ważne, do dziś nierozstrzygnięte pytanie:

Problem Erdősa–Strausa:
czy każdy ułamek $\frac{4}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych?

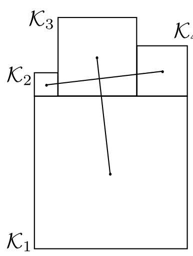
Andrzej Schinzel zaryzykował natomiast niepotwierdzoną dotychczas hipotezę:
dla dowolnego k istnieje takie N, że dla dowolnego $n>N$ ułamek $\frac{k}{n}$ jest sumą trzech różnych ułamków prostych.

Czytelniku – do roboty!

M.K.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1426. Dany jest kwadrat $\mathcal{K}_1$. Na jednym z jego boków, na zewnątrz, zbudowano trzy sąsiadujące kolejno kwadraty $\mathcal{K}_2,\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_4$. Udowodnić, że odcinki łączące odpowiednio środki kwadratów $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_3$ oraz $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_4$ są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 3

M 1427. Czy, mając do dyspozycji cztery kolory, można pokolorować każdą liczbę rzeczywistą nieujemną na jeden z nich tak, aby żadne liczby a,b,c spełniające zależność $a+b=2c+2$ nie były tego samego koloru?
Rozwiązanie na str. 3

M 1428. Niech $a_1,\ldots,a_n$ będą liczbami dodatnimi i niech S_k oznacza sumę wszystkich iloczynów różnych k liczb spośród $a_1,\ldots,a_n$,

$$S_k=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}.$$

Udowodnić, że dla każdego naturalnego $1\leqslant k\leqslant n-1$ spełniona jest nierówność

$$S_kS_{n-k}\geqslant\binom{n}{k}^2 a_1\cdot\ldots\cdot a_n.$$

Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 859. Naczynie o objętości V i ściankach doskonale odbijających promieniowanie elektromagnetyczne wypełnione jest promieniowaniem o całkowitej energii E. Jakie ciśnienie p na ścianki naczynia wywiera zawarte w nim promieniowanie elektromagnetyczne?
Rozwiązanie na str. 23

F 860. Zmierzona przez satelity (tj. poza atmosferą) średnia wartość strumienia energii promieniowania słonecznego (tzw. stała słoneczna) wynosi $q=1360\ \mathrm{W/m^2}$. Jaki jest stosunek siły odpychającej Ziemię od Słońca wynikającej z wywieranego przez to promieniowanie ciśnienia do siły grawitacyjnego przyciągania Ziemi i Słońca?

Dla uproszczenia przyjmujemy, że całe promieniowanie jest pochłaniane przez Ziemię, przyspieszenie ziemskie wynosi $\mathrm{g}=9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, prędkość światła $c=3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, odległość Ziemia-Słońce to średnio $R_{\mathrm{ZS}}=1{,}5\cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$, rok trwa w przybliżeniu $T=3{,}16\cdot 10^7\ \mathrm{s}$, stała grawitacji $\mathrm{G}=6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$.
Rozwiązanie na str. 23

Wskazówka: Promieniowanie elektromagnetyczne to gaz fotonów.