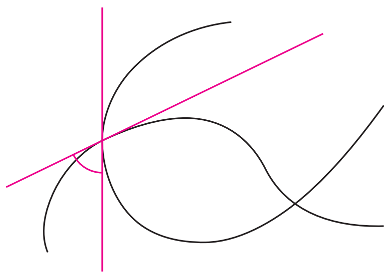
Symetria względem okręgu

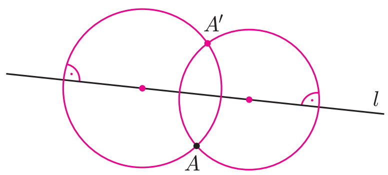
Michał MIŚKIEWICZ[*]

W naszych rozważaniach wzbogacimy płaszczyznę o dodatkowy punkt, który oznaczymy przez ∞. Przyjmiemy przy tym, że ów punkt leży na każdej z prostych. Takie rozszerzone proste oraz okręgi obejmiemy wspólną nazwą *bloków*. Czytelnik może wyobrażać sobie ∞ jako punkt „nieskończenie daleko”, ale równie dobrze może traktować go jedynie jako umowę notacyjną, która ułatwi sformułowanie pewnych zależności.



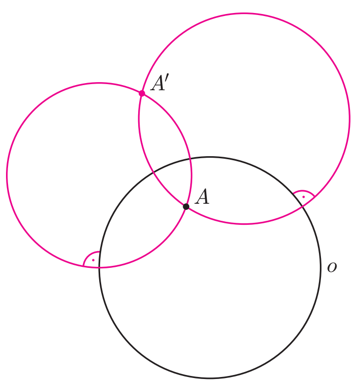
Kąt między krzywymi to kąt między stycznymi do nich w punkcie ich przecięcia.

Zacznijmy od zdefiniowania kąta między dwiema krzywymi: jeśli dwie gładkie krzywe się przecinają, to kątem między nimi nazwiemy kąt między stycznymi poprowadzonymi w punkcie przecięcia. W ogólności kąt ten może być różny dla różnych punktów przecięcia, tutaj jednak ograniczymy się wyłącznie do rozważania bloków. Dwa bloki mogą przecinać się w więcej niż jednym punkcie, ale wtedy otrzymany kąt nie zależy od jego wyboru; możemy więc śmiało mówić o kącie między dwoma przecinającymi się blokami. Gdy kąt ten jest prosty, figury nazywamy prostopadłymi. Na przykład, prosta jest prostopadła do okręgu dokładnie wtedy, gdy przechodzi przez jego środek.



Tak konstruuje się obraz punktu w symetrii względem prostej,

Przypomnijmy dobrze znaną konstrukcję symetrii osiowej cyrklem i linijką. Aby dla danej prostej l i punktu A wyznaczyć punkt A' do niego symetryczny, zakreślamy dwa okręgi przechodzące przez A i prostopadłe do prostej l (czyli o środkach leżących na l). Wówczas punkt A' otrzymujemy jako drugi punkt przecięcia tych okręgów. Oczywiście równie poprawne byłoby tutaj zastąpienie słowa *okrąg* słowem *blok*. Jedyną zmianą byłoby dopuszczenie prostej przechodzącej przez A i prostopadłej do l – co prawda trudniej jest ją wytyczyć, ale przecież i ona przechodzi przez A'. Tak sformułowany opis konstrukcji motywuje do przeprowadzenia podobnej operacji w przypadku okręgu.



a tak względem okręgu.

Definicja (symetria względem okręgu). Dany jest okrąg o oraz punkt A. Poprowadźmy dwa bloki przechodzące przez A i prostopadłe do okręgu o. Ich drugi punkt przecięcia A' nazwiemy punktem symetrycznym do A względem okręgu o. Otrzymane przekształcenie nazwiemy symetrią (lub inwersją) względem okręgu o.

Jest jasne, że tak zdefiniowane przekształcenie jest samoodwrotne: obrazem obrazu dowolnego punktu jest on sam. Powyższa definicja obejmuje również przypadki, gdy A jest punktem ∞ lub środkiem okręgu o. Punkty te zamieniają się miejscami, gdyż wszystkie proste przechodzące przez środek okręgu są prostopadłe do o i przechodzą przez punkt ∞.

O symetrii względem okręgu (inwersji) można było przeczytać więcej m.in. w *deltoidzie* 5/2013 i 8/2013. Definicja podana powyżej różni się jednak od tej powszechnie przyjętej. Posiada ona niewątpliwe wady – nie jest na przykład jasne, że określenie punktu A' nie zależy od wyboru bloków prostopadłych. Czytelnik znający podstawowe własności inwersji (można je znaleźć w przywołanych artykułach) może łatwo ze standardowej definicji wyprowadzić powyższą jako wniosek. Nasza definicja posiada jednak następującą zaletę – w naturalny sposób uogólnia pojęcie symetrii osiowej. Tutaj pójdziemy na skróty, przywołując bez dowodu najważniejsze własności symetrii względem ustalonego bloku b:

Definicja (wersja standardowa). Dany jest okrąg $o = o(S, r)$ oraz punkt A. Punktem symetrycznym do A względem okręgu o nazwiemy punkt A' na półprostej $SA^{\rightarrow}$ spełniający $SA \cdot SA' = r^2$.

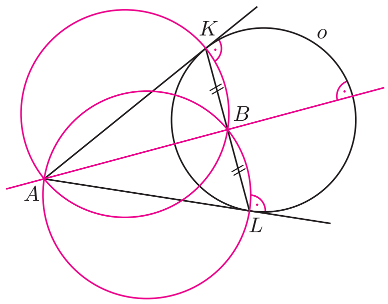
1. Obrazem dowolnego bloku jest blok.
2. Zachowane są kąty między krzywymi, w szczególności zachowana jest prostopadłość bloków.
3. Zachowane są symetrie względem bloków, to znaczy jeśli punkty A, A' są symetryczne względem o, to ich obrazy są symetryczne względem obrazu o.

Gdy b jest okręgiem o środku S, to punkty S, ∞ są symetryczne względem b. Dlatego obrazem bloku przechodzącego przez S jest blok przechodzący przez ∞, czyli prosta. W podobny sposób na podstawie własności 1 można podać kryteria, kiedy obrazem prostej jest okrąg, kiedy obraz okręgu przechodzi przez S itd.

[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Zwróćmy uwagę, że trzecia własność wynika z dwóch poprzednich. Istotnie, jeśli zgodnie z definicją mamy dwa bloki prostopadłe do o przechodzące przez A i A', to przy symetrii względem b konfiguracja ta jest zachowana: ich obrazy są blokami prostopadłymi do obrazu o i przechodzącymi przez obrazy punktów A i A', a zatem obrazy tych punktów są symetryczne względem obrazu o.

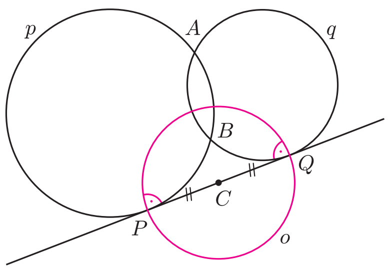
Poniżej znajdują się przykłady zadań, w których można z powodzeniem wykorzystać wymienione własności.



Rys. 1

Zadanie 1. Proste k, l są styczne do okręgu o w punktach K, L i przecinają się w punkcie A. Punkt B jest środkiem odcinka KL. Wykazać, że punkty A, B są symetryczne względem okręgu o.

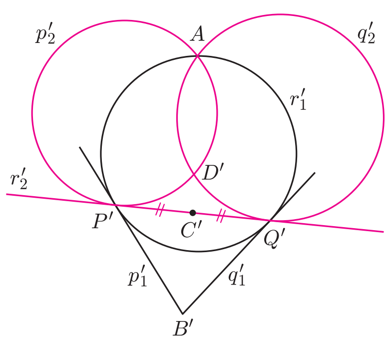
Rozwiązanie. Skoro prosta AB jest prostopadła do KL, to jako bloki z definicji można przyjąć okręgi o średnicach AK i AL, gdyż są prostopadłe do o i przechodzą przez A, B (rys. 1). Oczywiście, sama prosta AB też się do tego celu nadaje. □



Rys. 2

Zadanie 2. Okręgi p i q przecinają się w punktach A i B. Prosta r jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q. Punkt C jest środkiem odcinka PQ. Wykazać, że punkty A, B, C są współliniowe.

Rozwiązanie. Niech o będzie okręgiem o średnicy PQ. Okręgi p, q są do niego prostopadłe, a zatem punkty A, B są symetryczne względem o (rys. 2). Stąd już wynika, że są współliniowe z punktem C jako środkiem tego okręgu – prosta poprowadzona z C do punktu A jest prostopadła do o, więc musi przechodzić przez punkt B. □

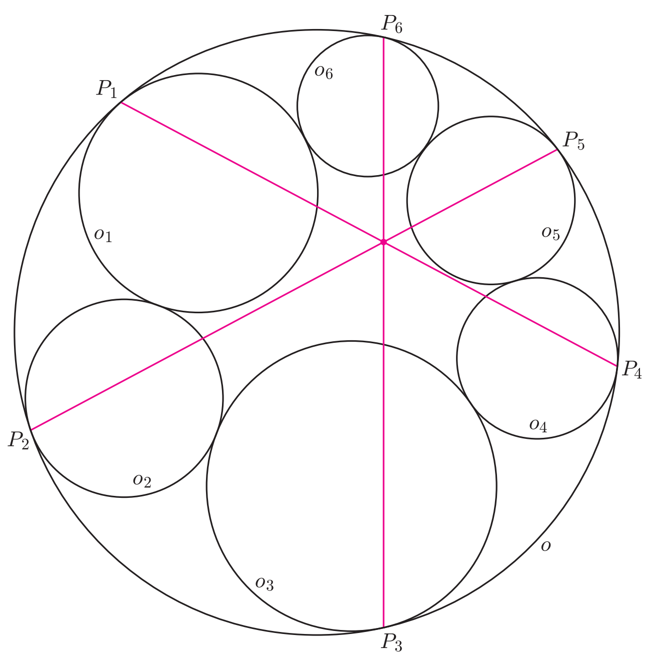


Rys. 3

Zadanie 3. Okręgi p_1 i q_1 przecinają się w punktach A i B. Prosta r_1 jest styczna do tych okręgów w punktach odpowiednio P i Q. Punkt C jest symetryczny do punktu B względem prostej r_1. Okrąg r_2 jest opisany na trójkącie APQ. Proste p_2 i q_2 styczne do r_2 w punktach odpowiednio P i Q przecinają się w punkcie D. Wykazać, że punkty A, C, D są współliniowe.

Rozwiązanie. Przeprowadźmy symetrię względem dowolnego okręgu o środku w A; obraz każdej z figur oznaczmy przez dodanie znaku prim. Na podstawie własności 1 możemy zauważyć, że figury z zadania zamieniły się rolami: okręgi p'_2 i q'_2 przecinają się w punktach A i D', prosta r'_2 jest styczna do tych okręgów w punktach P', Q', okrąg r'_1 jest opisany na trójkącie $AP'Q'$, proste p'_1 i q'_1 są styczne do r'_1 w punktach P', Q' oraz przecinają się w punkcie B' (rys. 3).

Dzięki własności 3 wiemy, że punkt C' jest symetryczny do punktu B' względem okręgu r'_1, co na mocy zadania 1 oznacza, że jest środkiem odcinka $P'Q'$. W ten sposób otrzymaliśmy konfigurację z zadania 2, a zatem punkty A, C', D' są współliniowe. Obrazem prostej $AC'D'$ jest prosta ACD, co kończy rozwiązanie. □



W drugiej części artykułu zaprezentuję wyjątkowo eleganckie twierdzenie, którego dowód wykorzystuje niektóre z przedstawionych wcześniej własności symetrii względem okręgu.

Twierdzenie o siedmiu okręgach. Dany jest okrąg o oraz styczne do niego okręgi o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6, z których każdy jest styczny do następnego. Okrąg o_i jest styczny do o w punkcie P_i, ponadto punkty $P_1, P_2, \ldots, P_6$ leżą na o w tej właśnie kolejności. Wtedy proste P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 przecinają się w jednym punkcie.

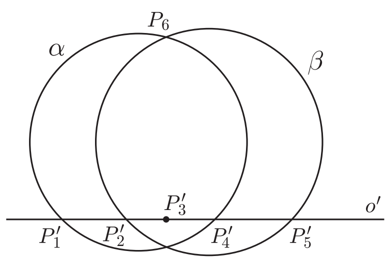
W dowodzie będziemy się posługiwać *potęgą punktu względem okręgu.* O tym przydatnym narzędziu można przeczytać w *deltoidzie* 2/2012 i 3/2012. Poniżej podajemy kluczowe dla nas własności i pojęcia.

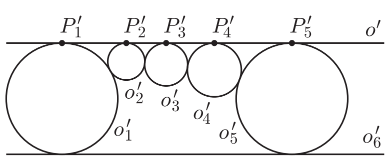
Uwaga. Jeśli dany jest okrąg o i punkt A, a prosta k przechodzi przez A i przecina o w punktach P, Q, to wartość iloczynu skalarnego $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ nie zależy od wyboru prostej k. Tę wspólną wartość nazywamy *potęgą A względem o*. Dla dowolnych niewspółśrodkowych okręgów o_1, o_2 zbiór tych wszystkich punktów A, które mają tę samą potęgę względem obu tych okręgów, tworzy prostą. Nazywamy ją *osią potęgową okręgów o_1, o_2*.

Jako przykład możemy rozważyć okręgi o_1, o_2 przecinające się w punktach A, B. Oba punkty mają tę samą (zerową) potęgę względem obu okręgów, a zatem osią potęgową okręgów o_1, o_2 jest ich wspólna sieczna AB. Ta obserwacja, choć bardzo prosta, okaże się nam jeszcze przydatna.

Lemat. Dana jest prosta k oraz okręgi o_1, o_2, o_3, z których każdy jest styczny do następnego. Okrąg o_i jest styczny do k w punkcie P_i, ponadto punkty P_1, P_2, P_3 leżą na k w tej właśnie kolejności. Wtedy stosunek długości odcinków powstałych na prostej k zależy wyłącznie od stosunku promieni okręgów o_1, o_3.

Lemat powyżej jest pozostawiony Czytelnikowi jako zadanie. Istotnie, nietrudno jest obliczyć długości tych odcinków na podstawie promieni okręgów o_1, o_2, o_3; można też próbować mniej bezpośrednich metod. Teraz możemy już przejść do właściwego dowodu.



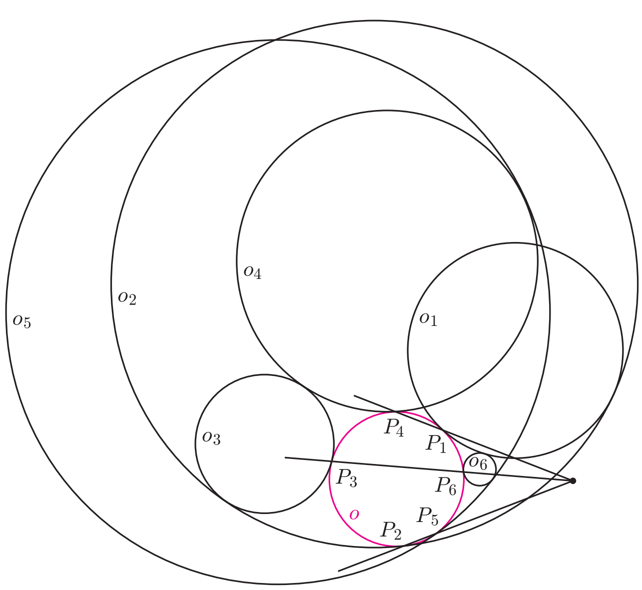


Dowód twierdzenia. Podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3, przeprowadźmy symetrię względem dowolnego okręgu o środku w P_6 i obraz każdej z figur oznaczmy przez dodanie znaku prim. Podobnie też możemy stwierdzić, że okręgi o i o_6 przechodzą na proste równoległe o' i o_6', a obrazami pozostałych okręgów są okręgi $o_1', \ldots, o_5'$ zachowujące odpowiednie styczności; ich promienie oznaczmy kolejno przez $r_1, \ldots, r_5$. W szczególności oba okręgi o_1', o_5' są styczne do prostych równoległych o' i o_6', zatem $r_1 = r_5$. Punkty styczności $P_1', \ldots, P_5'$ leżą na prostej o' w tej właśnie kolejności.

Proste P_1P_4 i P_2P_5 przechodzą na okręgi $\alpha = o(P_1'P_4'P_6)$ i $\beta = o(P_2'P_5'P_6)$. Pozostaje wykazać, że prosta $P_3'P_6$ (czyli obraz prostej P_3P_6) przechodzi przez drugi punkt przecięcia α i β. Na podstawie stwierdzenia i następującej po nim uwagi jest to równoważne temu, że punkt P_3' leży na osi potęgowej α i β. Aby to sprawdzić, wystarczy pokazać równość $\overrightarrow{P_3'P_1'} \cdot \overrightarrow{P_3'P_4'} = \overrightarrow{P_3'P_2'} \cdot \overrightarrow{P_3'P_5'}$, która przy ustalonej przez nas kolejności punktów $P_1', \ldots, P_5'$ przyjmuje postać proporcji

$$\frac{P_3'P_1'}{P_3'P_2'} = \frac{P_3'P_5'}{P_3'P_4'}.$$

Lemat implikuje, że lewa strona równości wyraża się przez stosunek promieni r_1/r_3; podobnie prawa strona wyraża się w ten sam sposób przez r_5/r_3. Już wcześniej zauważyliśmy, że $r_1 = r_5$, co kończy dowód. □



Na koniec chciałbym zachęcić Czytelnika do zastanowienia się nad poniższymi pytaniami. Wydają się one całkiem naturalne, a w celu znalezienia odpowiedzi wystarczy prześledzić powyższy dowód.

- Jak sformułować twierdzenie, aby można było w nim mówić o dowolnych blokach $o, o_1, \ldots, o_6$, niekoniecznie okręgach?
- Jakie inne kolejności punktów $P_1, \ldots, P_6$ na okręgu o można dopuścić w założeniach?