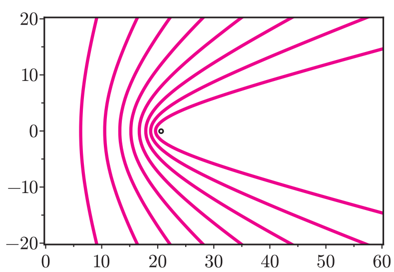
Proca grawitacyjna

*Szymon CHARZYŃSKI**

Kiedy podrzucamy piłkę do góry, to przyciąganie grawitacyjne zawsze ją zawraca. Im mocniej ją podrzucimy – czyli im większą nadamy jej energię – tym wyżej poleci, zanim zawróci. Ale czy zawsze zawróci? Nadanie obiektowi wystarczająco dużej prędkości początkowej (większej od pewnej granicznej wartości zwanej prędkością ucieczki) pozwala mu uwolnić się z przywiązania do Ziemi i odlecieć na dowolnie dużą odległość. Przyciąganie Ziemi nigdy nie zdoła zawrócić takiego obiektu. Prędkość ucieczki z powierzchni Ziemi to około 11,2 km/s.

Sondy, które opuściły Układ Słoneczny to Pioneer 10 i 11 (wystrzelone w 1972 i 1973 r.) oraz Voyager 1 i 2 (wystrzelone w 1977 r.). Aktualnie sonda New Horizons (wystrzelona w 2006) jest na drodze do opuszczenia Układu Słonecznego. Do orbity Plutona dotrze w 2015 roku.

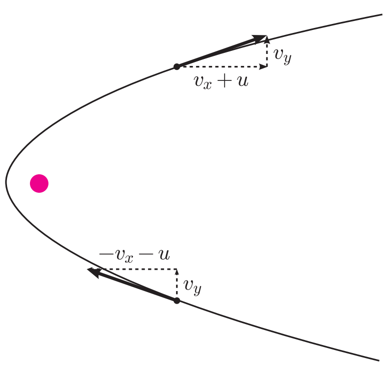
Mimo, że jest to dosyć duża prędkość (kilkukrotnie większa niż np. prędkość pocisku wystrzelonego z karabinu lub działa – dlatego pociski zawsze spadają na Ziemię), to ludzkość zbudowała pojazdy zdolne ją osiągać. Na przykład, przekroczył ją statek Apollo 11, którego załoga 45 lat temu, dokładnie 20 lipca, wylądowała na Księżycu. Rakiety Saturn V, wynoszące statki Apollo, były najpotężniejszymi zbudowanymi kiedykolwiek rakietami.



Rys. 1. Orbity hiperboliczne. Wszystkie hiperbole na rysunku mają wspólne ognisko, w którym znajduje się planeta.

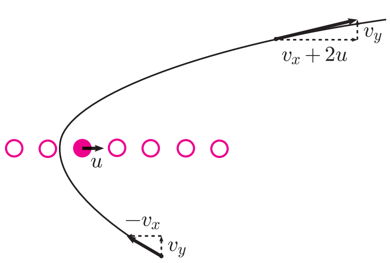
Chcąc lecieć dalej w Kosmos, napotkamy kolejną, większą przeszkodę. Dużo trudniejsze od ucieczki z Ziemi jest wyzwolenie się ze studni potencjału grawitacyjnego Słońca. Prędkość ucieczki względem grawitacji Słońca z punktu położonego na orbicie Ziemi wynosi około 42,1 km/s. Żaden ze zbudowanych do tej pory przez człowieka pojazdów kosmicznych nie był w stanie za pomocą własnych silników nadać sobie energii wystarczającej do ucieczki od Słońca. Wiadomo jednak, że kilka wysłanych z Ziemi sond opuściło Układ Słoneczny na dobre – przyciąganie Słońca nigdy ich już nie zawróci. Jak im się to zatem udało?

Rozpędzenie sondy uzyskano dzięki sprytnemu zaplanowaniu trajektorii lotu, tak aby w odpowiedni sposób przeleciała w pobliżu planety Układu Słonecznego i ukradła jej trochę energii. Mechanizm ten nosi nazwę *procy grawitacyjnej* lub *asysty grawitacyjnej* i był wykorzystywany do rozpędzania wielu sond, a niektóre z nich wykorzystywały go kilkakrotnie w czasie swojej misji, przelatując w pobliżu różnych planet lub zbliżając się kilka razy do tej samej. Jak to działa?



Rys. 2. Przelot sondy w pobliżu planety widziany w układzie odniesienia związanym z planetą.
u – prędkość planety względem Słońca,
v_x – składowa prędkości sondy względem Słońca równoległa do prędkości planety,
v_y – składowa prędkości sondy prostopadła do prędkości planety.

Wyobraźmy sobie, że sonda zbliża się do planety. W układzie odniesienia związanym z planetą, trajektoria sondy jest w przybliżeniu hiperbolą (przybliżenie polega na zaniedbaniu oddziaływania innych ciał niebieskich na sondę). Planeta znajduje się w ognisku hiperboli, a kąt pomiędzy asymptotami jest związany z tym, jak blisko planety przeleci sonda (rys. 1) – im bliżej, tym większemu odchyleniu ulegnie kierunek jej ruchu. W układzie odniesienia, w którym planeta spoczywa, ruch sondy jest symetryczny względem odwrócenia w czasie, a długość wektora prędkości przy ustalonej odległości od planety jest taka sama w fazie zbliżania, jak w fazie oddalania się sondy od planety. Sonda nadlatuje z daleka mając pewną energię kinetyczną, okrąża planetę i oddala się zachowując tę samą energię, którą miała przed zbliżeniem, istotnej zmianie ulega jedynie kierunek jej ruchu (rys. 2). Proces ten można porównać do sprężystego odbicia piłeczki od nieruchomej ściany. Piłeczka po odbiciu zachowuje energię kinetyczną, zmienia się jedynie kierunek jej prędkości. Można więc wyobrażać sobie zbliżenie sondy do planety jako rodzaj zderzenia sprężystego.



Rys. 3. Przelot sondy w pobliżu planety w układzie odniesienia Słońca.

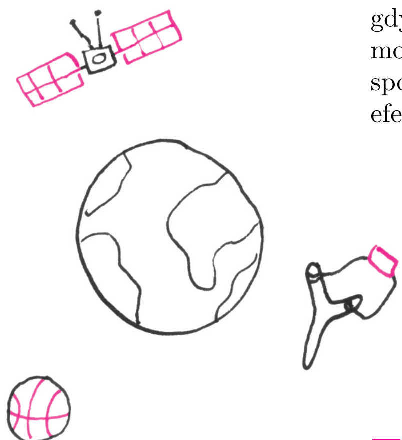
Chcieliśmy jednak umożliwić naszej sondzie ucieczkę spod jurysdykcji Słońca. Zastanówmy się zatem, jak to sprężyste zderzenie wygląda w układzie odniesienia związanym ze Słońcem. W tym układzie planeta się porusza i to dosyć szybko. Na przykład, prędkość Ziemi w jej ruchu orbitalnym wynosi około 30 km/s, Jowisza około 13 km/s. Ponieważ czas przelotu sondy w porównaniu z okresem orbitalnym planety jest bardzo mały, możemy w dobrym przybliżeniu przyjąć, że planeta w rozważanym czasie porusza się ruchem prostoliniowym. Wtedy transformacja prędkości z układu spoczynkowego planety do układu Słońca polega na dodaniu do wszystkich wektorów prędkości wektora prędkości planety względem Słońca. Rozważmy sytuację, w której sonda obiega Słońce po orbicie w kierunku przeciwnym do kierunku obiegu planety, czyli rozważane

*Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego

Przykład zbioru poszukiwanego w artykule *Jajo* Jerzego Tyszkiewicza.
Niech A będzie zbiorem tych liczb naturalnych, które nie są postaci 2^k, dla $k \geqslant 1$. Wówczas A nie jest zbiorem prawie-okresowym, gdyż odstępy pomiędzy kolejnymi elementami brakującymi w A coraz bardziej rosną. Jednak zbiór $A + A$ jest prawie-okresowy, gdyż po prostu $A + A = \mathbb{N}$. Żeby to zobaczyć weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $n \in A$, to $n = (0 + n) \in (A + A)$, jako że $0 \in A$. Jeśli zaś $n \notin A$, to $(n - 1) \in A$, ponieważ nie istnieją dwie sąsiednie liczby naturalne większe lub równe 2 będące potęgami dwójki. A zatem $n = (1 + (n - 1)) \in (A + A)$, jako, że $1 \in A$. Czytelnik dociekliwy może zauważyć, że taka definicja zbioru A dalece nie jest jedyna możliwa, w szczególności korzystaliśmy jedynie z bardzo niewielu własności funkcji 2^n.

obiekty początkowo poruszają się z grubsza w przeciwnych kierunkach. Składowe prędkości sondy prostopadłe do kierunku ruchu planety nie zmienią się, natomiast ulegną zmianie składowe równoległe – w fazie zbliżania od wartości składowej równoległej odejmie się prędkość planety, a w fazie oddalania prędkość planety się do niej doda (rys. 3). W konsekwencji, jeżeli porównamy składową równoległą prędkości sondy przed i po zbliżeniu, to będą się one różniły o podwojoną wartość prędkości planety. Uzyskamy zatem to, co chcieliśmy – sonda po zbliżeniu będzie się poruszać szybciej! Ponownie możemy zastosować analogię do odbijania piłeczki. Przelot w pobliżu nieruchomej planety porównaliśmy do sprężystego odbijania piłeczki o ścianę. Natomiast analogią przelotu obok planety poruszającej się jest odbijanie piłeczki od ruchomego obiektu, np. od czoła poruszającego się pociągu. Jeżeli rzucilibyśmy piłką z prędkością 20 km/h w jadący z prędkością 100 km/h z przeciwka pociąg, to po sprężystym odbiciu piłka leciałaby z prędkością $20\,\mathrm{km/h} + 2 \cdot 100\,\mathrm{km/h} = 220\,\mathrm{km/h}$. Oczywiście, w układzie odniesienia związanym z pociągiem prędkości piłki przed i po odbiciu mają wartość 120 km/h i są przeciwnie skierowane.

Dzięki powszechnemu zastosowaniu procy grawitacyjnej udało się przeprowadzić wiele spektakularnych kosmicznych misji, które byłyby niemożliwe do wykonania, gdyby sondy musiały polegać tylko na własnych silnikach. Asysta grawitacyjna może być wykorzystana nie tylko do rozpędzania sond, ale również do ich spowalniania. Wiele szczegółowych informacji na temat wykorzystania tego efektu w konkretnych misjach można znaleźć na stronie NASA i w Wikipedii.



Funkcja Lamberta

*Krzysztof OLESZKIEWICZ**

Określona na półprostej $[-1, \infty)$ funkcja $f(x) = xe^x$ jest ciągła i rosnąca, a zbiorem jej wartości jest półprosta $[-1/e, \infty)$. Można więc jednoznacznie zdefiniować funkcję $W : [-1/e, \infty) \to [-1, \infty)$ odwrotną do f, tj. taką, że $W(f(x)) = x$ dla każdego $x \geqslant -1/e$. Funkcję tę nazywa się obecnie funkcją Lamberta, ponieważ zagadnienia z nią związane rozważane były już przez osiemnastowiecznego matematyka Johanna Heinricha Lamberta (a także przez Eulera). Przydaje się ona do opisu rozwiązań ważnych w zastosowaniach równań różniczkowych z opóźnieniem i niektórych równań fizyki kwantowej, a także, jako funkcja tworząca, w kombinatoryce. Czytelnik zechce sprawdzić, że $-\frac{3}{\ln 3}W(-\frac{1}{3}\ln 3)$ jest rozwiązaniem równania $3^x = x^3$, i ustalić, czy liczba ta jest mniejsza od 3.

Ściślej mówiąc, we współczesnej matematyce rozważa się zwykle funkcję f określoną takim samym wzorem, ale na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, na której nie jest już ona różnowartościowa, w związku z czym funkcję odwrotną do niej trzeba definiować lokalnie; wprowadzona przez nas funkcja W to tylko fragment jednej z gałęzi funkcji Lamberta.

Udowodnimy, że dla liczb zespolonych z dostatecznie bliskich zera (można też ograniczyć się do z rzeczywistych bez potrzeby wprowadzania zmian w dowodzie) funkcję W można przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$W(z) = z - \frac{2^1}{2!}z^2 + \frac{3^2}{3!}z^3 - \frac{4^3}{4!}z^4 + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m,$$

gdzie $p_m = (-m)^{m-1}/m!$ – ponieważ $p_{m+1}/p_m \to e$, gdy $m \to \infty$, więc dla wszystkich z, dla których $|z| < 1/e$, szereg ten jest zbieżny.

Trzeba wykazać, że dla powyższego szeregu W równość $W(f(z)) = z$ jest spełniona dla wszystkich z z pewnego otoczenia zera. Przyda się nam prosta tożsamość kombinatoryczna.

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski