Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

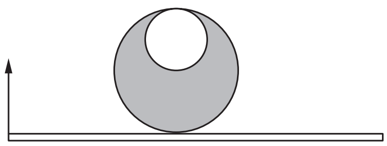
Rozwiązania zadań z numeru 3/2014

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Przypominamy treść zadań:

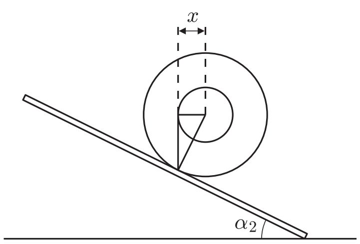
574. Na desce leży walec o promieniu R z wydrążeniem w kształcie walca o promieniu $R/2$ stycznym do osi walca (rys. 1). Deskę zaczynamy wolno podnosić za jeden koniec. Znaleźć kąt graniczny nachylenia deski, przy którym walec pozostanie jeszcze w równowadze. Współczynnik tarcia walca o deskę jest równy $\mu = 0{,}2$.

575. Okładki płaskiego kondensatora powietrznego o powierzchni S i wysokości h są skierowane pionowo i zanurzone w cieczy o stałej dielektrycznej ε do wysokości $h/3$. Oblicz ładunek, jakim naładowany jest kondensator, jeżeli w stanie równowagi ciecz wypełnia całą przestrzeń między okładkami. Gęstość cieczy wynosi ρ, odległość między okładkami jest mała w porównaniu z rozmiarami liniowymi okładek.



Rys. 1

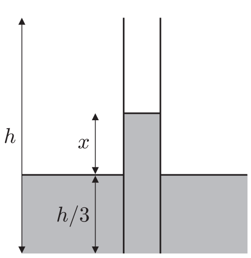
R 574. Należy porównać kąt nachylenia deski α_1, powyżej którego walec zacznie się zsuwać, i kąt α_2, powyżej którego zacznie się toczyć. Pierwszy warunek ma postać $\operatorname{tg}\alpha_1 = \mu = 0{,}2$.



Rys. 2

Niech x oznacza odległość środka masy wydrążonego walca od jego środka geometrycznego. Traktując walec pełny o masie m i promieniu R jako złożenie walca wydrążonego o masie $\frac{3}{4}m$ i walca o masie $\frac{1}{4}m$ promieniu $\frac{1}{2}R$ w miejscu wydrążenia, otrzymujemy związek $\frac{3}{4}mx = \frac{1}{8}mR$, skąd $x = \frac{1}{6}R$. Gdy deskę powoli podnosimy, wydrążony walec obraca się, a jego środek masy przesuwa się po okręgu o promieniu x (określamy położenie na prostej pionowej przechodzącej przez punkt styczności walca z deską). Moment siły ciężkości względem tego punktu jest wówczas równy 0. Kąt nachylenia deski, powyżej którego walec zacznie się staczać, określa warunek $\sin\alpha_2 = \frac{x}{R} = \frac{1}{6}$. Ponieważ $\sin\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} > \sin\alpha_2$, walec straci równowagę, gdy kąt nachylenia deski przekroczy $\arcsin\frac{1}{6}$ i walec zacznie się toczyć bez poślizgu.

R 575. Rozważmy sytuację, gdy poziom cieczy w kondensatorze znajduje się na wysokości x nad poziomem cieczy w naczyniu. Siła elektryczna $F(x)$ spowodowana niejednorodnością pola elektrycznego na brzegu kondensatora, pracując na małym odcinku Δx (dla którego można przyjąć, że wartość siły nie zmienia się), powoduje zmniejszenie energii elektrycznej kondensatora: $F(x)\Delta x = W_E(x) - W_E(x+\Delta x)$, gdzie $W_E(x) = \frac{Q^2}{2c(x)}$, zaś $c(x)$ jest pojemnością zastępczą dwóch kondensatorów połączonych równolegle – powietrznego o wysokości $\frac{2}{3}h - x$ oraz wypełnionego dielektrykiem o wysokości $\frac{1}{3}h + x$. Wyrażenie na siłę elektryczną możemy obliczyć bezpośrednio z wzoru $F(x) = -\frac{\Delta W_E}{\Delta x}$ przy $\Delta x \to 0$ lub obliczyć pochodną



Rys. 3

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}W_E}{\mathrm{d}E} = \frac{Q^2 d(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon a\left(\frac{(2+\varepsilon)h}{3} + (\varepsilon - 1)x\right)},$$

gdzie $a = S/h$ jest szerokością okładek kondensatora, zaś d odległością między okładkami. Wartość siły grawitacji działającej na ciecz wciągniętą do kondensatora wynosi $P(x) = \rho g a d x$. Z warunku równowagi sił elektrycznej i grawitacyjnej dla $x = \frac{2}{3}h$ otrzymujemy szukaną wartość ładunku

$$Q = 2S\varepsilon\sqrt{\frac{\varepsilon\rho g}{3(\varepsilon - 1)}}\,.$$

Zadanie można też rozwiązać, poszukując minimum energii układu.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 671 ($WT = 1{,}69$) i 672 ($WT = 1{,}66$) z numeru 12/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	43,38
Janusz Olszewski	Warszawa	41,33
Paweł Duch	Bielawa	40,18
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Wojciech Maciak	Warszawa	39,65
Stanisław Bednarek	Łódź	35,92
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

Rozwiązania zadań z numeru 3/2014

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

677. Rozważamy trójki liczb rzeczywistych (x, y, z), spełniające warunki

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2 + y^2 + z^2 > yz + zx + xy.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz.

678. Czy istnieją takie trzy różne liczby pierwsze p, q, r, że liczba $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez p, liczba $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez q, zaś liczba $2^{p-1} - 1$ dzieli się przez r?

677. Liczby x, y, z muszą być różne od zera. Przepisujemy pierwsze równanie jako $yz(x - y) = y - z$, i dalej (cyklicznie)

$$(1) \qquad yz(x - y) = y - z, \qquad zx(y - z) = z - x, \qquad xy(z - x) = x - y.$$

Mnożymy stronami:

$$(2) \qquad (xyz)^2(x - y)(y - z)(z - x) = (y - z)(z - x)(x - y).$$

Gdyby któraś z różnic $x - y$, $y - z$, $z - x$ była zerem, to wobec zależności (1) wszystkie byłyby zerami, czyli liczby x, y, z byłyby równe. To się jednak kłóci z nierównością, daną w założeniach. Różnice te są więc różne od zera. Równanie (2) po skróceniu daje wynik: $(xyz)^2 = 1$; jedynymi możliwymi wartościami iloczynu xyz są liczby 1 oraz -1. Każda z nich jest faktycznie osiągalna – na przykład dla $(x, y, z) = (1, -\frac{1}{2}, -2)$ oraz $(x, y, z) = (-1, \frac{1}{2}, 2)$.

678. Zadanie zaproponował najstarszy stażem ligowiec Witold Bednarek – całe szczęście, że wraz z rozwiązaniem. Zobaczmy je:

Przypuśćmy, że dla pewnej liczby pierwszej s liczba $2^s - 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze p, q, r. Wykażemy, że wówczas trójka p, q, r spełnia postulowane warunki.

Niech δ będzie najmniejszym wykładnikiem naturalnym, większym od 1, dla którego $2^\delta \equiv 1 \pmod{p}$. Z założenia także $2^s \equiv 1$, więc s dzieli się przez δ; a skoro s jest liczbą pierwszą, to $\delta = s$. W myśl małego twierdzenia Fermata $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, zatem $p - 1$ dzieli się przez δ, czyli przez s.

Analogicznie stwierdzamy, że s jest dzielnikiem liczb $q - 1$ oraz $r - 1$. Podnosząc kongruencję $2^s \equiv 1 \pmod{p}$ do potęgi $(q-1)/s$, widzimy, że $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Tak samo, cyklicznie, $2^{r-1} \equiv 1 \pmod{q}$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{r}$, czyli mamy to, o co chodzi (a nawet więcej: okazuje się, że każda z liczb $2^{p-1} - 1$, $2^{q-1} - 1$, $2^{r-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pqr).

Pozostaje wskazać liczbę pierwszą s o podanej na wstępie własności. Przeglądając tablicę liczb Mersenne'a znajdujemy w niej liczbę złożoną $2^{29} - 1$, z rozkładem na czynniki pierwsze $233 \cdot 1103 \cdot 2089$. Zatem liczby $p = 233$, $q = 1103$, $r = 2089$ tworzą jedną z trójek, jakich szukamy.

Rozwiązanie zadania F 859. Niech x oznacza kierunek prostopadły do ścianki, n gęstość fotonów, a ε średnią energię fotonu. Zderzając się sprężyście ze ścianką foton o pędzie P padający pod kątem θ przekazuje jej pęd $2P\cos\theta$. W jednostce czasu Δt z każdego kierunku tworzącego kąt θ z normalną do każdego elementu ścianki o powierzchni S dolatuje więc

$$\frac{nSc\Delta t\cos\theta}{4\pi}$$

fotonów – uwzględniony został izotropowy rozkład kierunków ruchu fotonów (czynnik 4π w mianowniku). Biorąc pod uwagę, że dla fotonu $P = \varepsilon/c$, gdzie c jest prędkością światła, siła nacisku na ściankę równa jest przekazowi pędu w jednostce czasu, a ciśnienie jest stosunkiem siły nacisku do pola powierzchni, i sumując po wszystkich kątach padania, otrzymujemy:

$$p = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta\, \sin\theta \cdot nc\cos\theta \cdot 2\frac{\varepsilon}{c}\cos\theta = \frac{1}{3}n\varepsilon.$$

Ostatecznie $p = \dfrac{1}{3}\dfrac{E}{V}$.

Wynik ten możemy uzyskać bez całkowania: w sześciennym naczyniu dla ustalonej ściany średnio 1/6 fotonów porusza się w jej kierunku, przekazując jej przy zderzeniu pęd $2E/c$.

Rozwiązanie zadania F 860. Energia fotonu o pędzie P wynosi cP. W związku z tym pochłanianie przez Ziemię promieniowania słonecznego związane jest z pochłanianiem strumienia pędu równego q/c. Związane z pochłanianiem pędu promieniowania siła F odpychająca od Słońca Ziemię o promieniu R wynosi więc $F = \pi R^2 q/c \approx 5{,}8 \cdot 10^8$ N. Siła F_G przyciągania Ziemi i Słońca wynosi:

$$F_G = \frac{GM_S M_Z}{R_{ZS}^2},$$

gdzie M_S oznacza masę Słońca, a M_Z masę Ziemi. Przyspieszenie Ziemi w ruchu dookoła Słońca wynosi $4\pi R_{ZS}/T^2$, a masę Ziemi możemy zastąpić wyrażeniem gR^2/G. Po podstawieniu tych wielkości otrzymujemy, że stosunek siły z jaką promieniowanie Słońca odpycha Ziemię do siły przyciągania Ziemia-Słońce wynosi:

$$\frac{F}{F_G} = \frac{GT^2 q}{4\pi R_{ZS} g c} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-14}.$$