Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Każdy czworokąt jest prostokątem

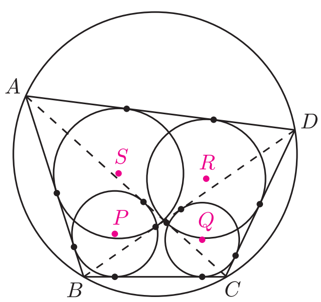
Jerzy BEDNARCZUK

Każdy czworokąt jest prostokątem

Niektórzy sądzą, że geometria jest trudna. Oto zadanie, które wielu by odstraszyło:

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. W trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB wpisano okręgi. Wykazać, że środki P, Q, R, S tych okręgów są wierzchołkami prostokąta.

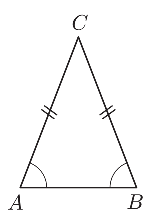
Rysunek do tego zadania mógłby wyglądać tak:



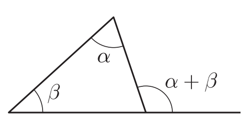
Wygląda przerażająco. A przecież wypadałoby jeszcze narysować dwusieczne wielu kątów (skoro są tu środki okręgów wpisanych w cztery trójkąty).

Zacznijmy od czegoś łatwiejszego:

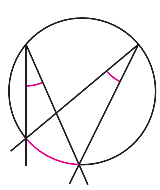
(1) *Jeśli dwa kąty trójkąta są równe, to przeciwległe im boki też są równe.*



(2) *Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych nie przylegających do niego.*

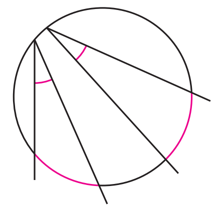


(3) *Jeśli dwa kąty wpisane w okrąg są oparte na tym samym łuku, to są równe.*



Z niezrozumiałych powodów ostatnie twierdzenie w szkołach jest nauczane w takiej właśnie, kalekiej wersji. Uzupełnijmy je więc:

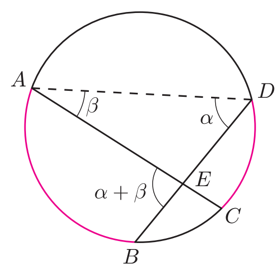
(4) *Dwa kąty wpisane w okrąg są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na przystających (równych) łukach.*



Korzyści z tego twierdzenia jest wiele. Na przykład, zamiast wykonywać działania na kątach wpisanych w okrąg, czasem wygodniej jest operować na łukach, na których są one oparte (uwalniając się w ten sposób od wierzchołków tych kątów).

Jeszcze coś prostego:

(5) *Przekątne czworokąta $ABCD$, wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie E. Niech kąty wpisane w ten okrąg, oparte odpowiednio na łukach AB i CD będą równe α i β. Wówczas $\sphericalangle AEB = \alpha + \beta$.*

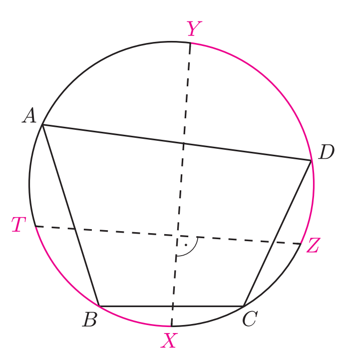


Dla dowodu wystarczy zauważyć, że kąt AEB jest kątem zewnętrznym trójkąta AED.

Twierdzenie (5) może być przydatne, bo kąt AEB nie jest ani kątem środkowym, ani wpisanym, ani dopisanym, a to twierdzenie pozwala obliczyć jego miarę w zależności od kątów wpisanych, opartych na łukach AB i CD.

Wykorzystamy to w następującym zadaniu:

(6) *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty T, X, Z, Y są środkami odpowiednio łuków AB, BC, CD, DA tego okręgu. Wykazać, że proste XY i TZ są prostopadłe.*



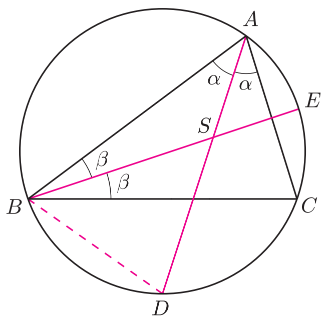
Dla dowodu wystarczy zauważyć, że suma łuków TX i ZY jest półokręgiem, a następnie skorzystać z twierdzenia (5).

Twierdzenie (4) może być także przydatne, gdy na rysunku mamy zaznaczyć środek okręgu **wpisanego** w trójkąt ABC.

Zaczynamy od narysowania okręgu **opisanego** na tym trójkącie i środków D i E łuków BC i CA.

Dwusieczne kątów naszego trójkąta to półproste AD i BE. Punkt S, w którym one się przecinają, to środek okręgu wpisanego.

Oznaczmy kąty jak na rysunku.

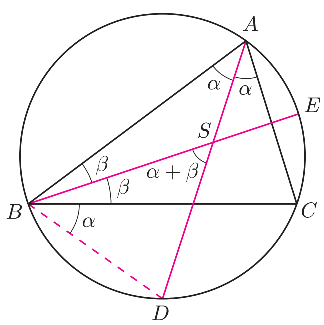


Zauważmy, że kąt BSD jest kątem zewnętrznym trójkąta ABS.

Wobec tego, na mocy twierdzenia (2), otrzymujemy, że $\sphericalangle BSD = \alpha + \beta$.

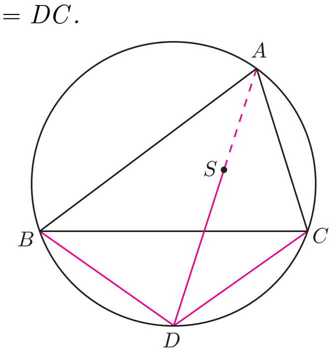
Kąty CAD i CBD są wpisane w okrąg i oparte na tym samym łuku, więc $\sphericalangle CBD = \alpha$.

Otrzymaliśmy w trójkącie BSD równe kąty przy wierzchołkach B i S. Na mocy twierdzenia (1) otrzymujemy równość $DB = DS$.



Tym samym udowodniliśmy następujące twierdzenie:

(7) *Jeżeli punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a półprosta AS przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D, to $DB = DS = DC$.*

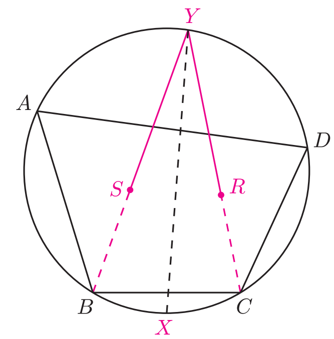


Uwaga: przypominamy, że punkt D jest środkiem łuku BC.

Otrzymaliśmy wygodną metodę wyznaczania środka okręgu wpisanego w trójkąt ABC: wyznaczamy środek D łuku BC, a następnie na odcinku DA wyznaczamy taki punkt S, że $DS = DB$.

Wróćmy do zadania, od którego zaczynaliśmy rozważania:

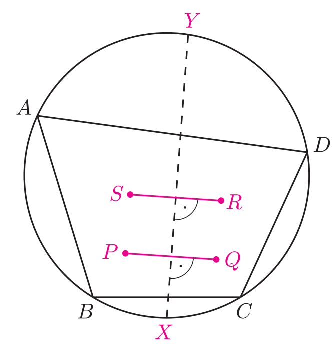
Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. W trójkąty ABC, BCD, CDA, DAB wpisano okręgi. Wykazać, że środki P, Q, R, S tych okręgów są wierzchołkami prostokąta.



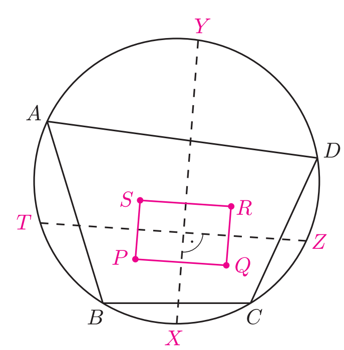
Środki łuków BC i DA oznaczmy odpowiednio przez X i Y.

Na mocy twierdzenia (7) środki R i S okręgów wpisanych w trójkąty CDA i DAB należą odpowiednio do odcinków YC, YB i spełniają warunek $YR = YD = YA = YS$.

Otrzymaliśmy trójkąt równoramienny SYR, w którym YX jest dwusieczną kąta między ramionami. Wobec tego prosta XY jest symetralną odcinka SR.



Analogicznie otrzymujemy, że prosta XY jest symetralną odcinka PQ. Prosta XY jest więc osią symetrii czworokąta $PQRS$. Podobnie dowodzimy, że jeśli punkty T, Z są środkami łuków AB i CD, to prosta TZ też jest osią symetrii czworokąta $PQRS$. Na mocy twierdzenia (6) proste XY i TZ są prostopadłe. Wobec tego czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.



Jaka ta geometria łatwa.

Nawet, jeśli nie każdy czworokąt jest prostokątem, tylko niektóre.