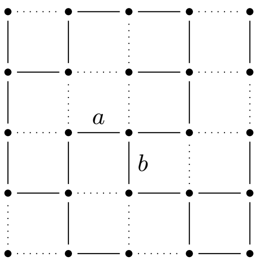
# Informatyczny kącik olimpijski (74): Jakie to proste




Rys. 1. Jeśli spojrzymy na mapę miasta jak na układ współrzędnych, to dla każdej pary liczb całkowitych $x, y$, takiej że $1 \leqslant x, y \leqslant n$, w punkcie $(x, y)$ znajduje się skrzyżowanie; ponadto każde dwa skrzyżowania oddalone o 1 są połączone ulicą. Przykładowe miasto dla $n = 5$, w którym zamknięto już 16 ulic (linie kropkowane). Po zamknięciu ulicy $a$ będzie można przejechać między jej końcami, nie uda się to natomiast po zamknięciu ulicy $b$.

W tym kąciku dwa zadania z cyklu naszych ulubionych, tzn. na pierwszy rzut oka ciężkie do ugryzienia, ale ące ładne i krótkie rozwiązania.

Zadanie *Bajthattan* pochodzi z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym z roku 2013. Sieć drogowa w mieście tworzy regularną siatkę $n \times n$ (rys. 1). Napływają do nas informacje o zamknięciach ulic. Dla każdej informacji mamy stwierdzić, czy po zamknięciu danej ulicy nadal będzie można przejechać pomiędzy skrzyżowaniami położonymi na jej końcach, poruszając się jedynie po ulicach, które dotychczas nie zostały zamknięte.

Oczywiście, sieć drogową możemy zastąpić grafem nieskierowanym, w którym wierzchołki reprezentować będą skrzyżowania, a krawędzie – ulice. I, oczywiście, rozwiązanie brutalne, które dla każdego zamknięcia ulicy (usunięcia krawędzi grafu) wykonuje przeszukiwanie grafu w celu znalezienia ścieżki pomiędzy dwoma wierzchołkami, nas nie satysfakcjonuje. Takie rozwiązanie działa w czasie $O(kn^2)$, gdzie $k$ to liczba usunięć krawędzi.

Zauważmy, że jeśli ścieżka pomiędzy końcami usuniętej krawędzi nie istnieje, to usunięcie tej krawędzi spowodowało, że jej końce znalazły się w różnych spójnych składowych grafu. Równoważnie zatem możemy badać, które usunięcia krawędzi zwiększają liczbę spójnych składowych grafu. Nasz graf jest *planarny*, zatem zależność między liczbą jego wierzchołków, krawędzi, ścian (części płaszczyzny ograniczonych krawędziami) i spójnych składowych (oznaczymy te liczby kolejno przez $v$, $e$, $f$ i $s$) wyraża się wzorem Eulera:

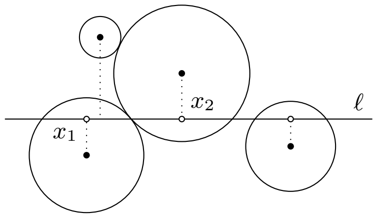
$$v - e + f = s + 1.$$

Rozważmy usunięcie jednej krawędzi. Liczba wierzchołków $v$ jest stała (równa $n^2$), natomiast liczba krawędzi $e$ zmniejsza się o jeden. Jeśli po obu stronach usuwanej krawędzi mieliśmy tę samą ścianę, to $f$ się nie zmienia (i wtedy liczba spójnych składowych $s$ rośnie o jeden), w przeciwnym wypadku $f$ maleje o jeden (i wtedy $s$ się nie zmienia).

Powyższy warunek możemy testować, trzymając ściany grafu w strukturze dla zbiorów rozłącznych. W momencie, gdy usuwamy krawędź, dwie ściany należy połączyć. Rozwiązanie to działa w czasie $O(n^2 + k \log^* n)$.

⋆ ⋆ ⋆

Z kolei *Kręgi w zbożu* pojawiły się w finale Potyczek Algorytmicznych 2012. Na płaszczyźnie znajduje się $n$ kół, których wnętrza są rozłączne. Środek $i$-tego koła znajduje się w punkcie $(x_i, y_i)$, a jego promień wynosi $r_i$. Należy wyznaczyć liczbę par kół, które mają punkt wspólny.




Rys. 2. Na odcinku $x_1x_2$ prostej $\ell$ nie ma żadnego zrzutowanego środka koła, które przecina $\ell$.

Znowu rozwiązanie brutalne, które z osobna sprawdza każdą z $O(n^2)$ par kół, jest za wolne. Z drugiej strony, odpowiedź nie będzie nigdy przekraczać $3n$ (gdyż graf o $n$ wierzchołkach w środkach okręgów i krawędziach łączących środki stykających się kół jest planarny, więc ma co najwyżej $3n$ krawędzi). Spróbujmy zatem ograniczyć liczbę kandydatów na pary, które musimy sprawdzić. Zauważmy, że jeśli poprowadzimy linię prostą $\ell$ przez punkt przecięcia pary kół, a następnie zrzutujemy prostopadle na tę prostą środki wszystkich kół, które przecinają $\ell$, to zrzutowane środki kół należących do pary będą sąsiadować na prostej (rys. 2).

Dzięki temu spostrzeżeniu możemy zastosować metodę zamiatania. Będziemy przesuwać od dołu do góry poziomą linię prostą (miotłę) i jednocześnie utrzymywać zbiór kół, które ją przecinają. Zauważmy, że $i$-te koło zostanie wrzucone do zbioru, gdy miotła będzie w pozycji $y = y_i - r_i$, a zostanie z niego usunięte dla $y = y_i + r_i$. Co więcej, będą to jedyne momenty, w których zawartość zbioru będzie się zmieniać. Zatem w czasie $O(n \log n)$ sortujemy te „istotne” pozycje miotły, a następnie przechodzimy je w kolejności niemalejącej. Za każdym razem, gdy uaktualnimy zbiór, sprawdzamy stałą liczbę par kół (konkretnie te, które sąsiadują z dodanym kołem lub sąsiadowały z usuniętym). Zbiór realizujemy jako uporządkowany słownik, w którym koła są posortowane względem wartości $x_i$ i który umożliwia w czasie $O(\log n)$ dodawanie i usuwanie elementów oraz znajdowanie następnego i poprzedniego elementu w tym porządku.

Rozwiązanie działa w czasie $O(n \log n)$. I jak to bywa w zadaniach z geometrii obliczeniowej – pozostał jeden przypadek szczególny (gdy miotła jest styczna do pary kół), którego uwzględnienie pozostawiamy jako zadanie dla Czytelników.

*Tomasz IDZIASZEK*

**Rozwiązanie zadania M 1428.**
Oznaczmy $p_I = a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$, gdzie $I$ jest ciągiem indeksów $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ (mamy $\binom{n}{k}$ takich ciągów). Niech również $p = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Wówczas $S_k = \sum_I p_I$ oraz $S_{n-k} = \sum_I p/p_I$, więc z nierówności Schwarza dostajemy

$$\sqrt{S_k S_{n-k}} = \sqrt{\sum_I p_I}\sqrt{\sum_I \frac{p}{p_I}} \geqslant \sum_I \sqrt{p} = \binom{n}{k}\sqrt{p}.$$