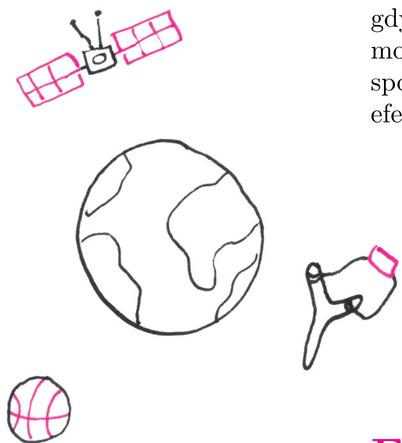
Przykład zbioru poszukiwanego w artykule *Jajo* Jerzego Tyszkiewicza.
Niech A będzie zbiorem tych liczb naturalnych, które nie są postaci 2^k, dla $k \geqslant 1$. Wówczas A nie jest zbiorem prawie-okresowym, gdyż odstępy pomiędzy kolejnymi elementami brakującymi w A coraz bardziej rosną. Jednak zbiór $A + A$ jest prawie-okresowy, gdyż po prostu $A + A = \mathbb{N}$. Żeby to zobaczyć weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $n \in A$, to $n = (0 + n) \in (A + A)$, jako że $0 \in A$. Jeśli zaś $n \notin A$, to $(n - 1) \in A$, ponieważ nie istnieją dwie sąsiednie liczby naturalne większe lub równe 2 będące potęgami dwójki. A zatem $n = (1 + (n - 1)) \in (A + A)$, jako, że $1 \in A$. Czytelnik dociekliwy może zauważyć, że taka definicja zbioru A dalece nie jest jedyna możliwa, w szczególności korzystaliśmy jedynie z bardzo niewielu własności funkcji 2^n.

obiekty początkowo poruszają się z grubsza w przeciwnych kierunkach. Składowe prędkości sondy prostopadłe do kierunku ruchu planety nie zmienią się, natomiast ulegną zmianie składowe równoległe – w fazie zbliżania od wartości składowej równoległej odejmie się prędkość planety, a w fazie oddalania prędkość planety się do niej doda (rys. 3). W konsekwencji, jeżeli porównamy składową równoległą prędkości sondy przed i po zbliżeniu, to będą się one różniły o podwojoną wartość prędkości planety. Uzyskamy zatem to, co chcieliśmy – sonda po zbliżeniu będzie się poruszać szybciej! Ponownie możemy zastosować analogię do odbijania piłeczki. Przelot w pobliżu nieruchomej planety porównaliśmy do sprężystego odbijania piłeczki o ścianę. Natomiast analogią przelotu obok planety poruszającej się jest odbijanie piłeczki od ruchomego obiektu, np. od czoła poruszającego się pociągu. Jeżeli rzucilibyśmy piłką z prędkością 20 km/h w jadący z prędkością 100 km/h z przeciwka pociąg, to po sprężystym odbiciu piłka leciałaby z prędkością $20\,\mathrm{km/h} + 2 \cdot 100\,\mathrm{km/h} = 220\,\mathrm{km/h}$. Oczywiście, w układzie odniesienia związanym z pociągiem prędkości piłki przed i po odbiciu mają wartość 120 km/h i są przeciwnie skierowane.

Dzięki powszechnemu zastosowaniu procy grawitacyjnej udało się przeprowadzić wiele spektakularnych kosmicznych misji, które byłyby niemożliwe do wykonania, gdyby sondy musiały polegać tylko na własnych silnikach. Asysta grawitacyjna może być wykorzystana nie tylko do rozpędzania sond, ale również do ich spowalniania. Wiele szczegółowych informacji na temat wykorzystania tego efektu w konkretnych misjach można znaleźć na stronie NASA i w Wikipedii.



Funkcja Lamberta

*Krzysztof OLESZKIEWICZ**

Ściślej mówiąc, we współczesnej matematyce rozważa się zwykle funkcję f określoną takim samym wzorem, ale na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$, na której nie jest już ona różnowartościowa, w związku z czym funkcję odwrotną do niej trzeba definiować lokalnie; wprowadzona przez nas funkcja W to tylko fragment jednej z gałęzi funkcji Lamberta.

Określona na półprostej $[-1, \infty)$ funkcja $f(x) = xe^x$ jest ciągła i rosnąca, a zbiorem jej wartości jest półprosta $[-1/e, \infty)$. Można więc jednoznacznie zdefiniować funkcję $W : [-1/e, \infty) \to [-1, \infty)$ odwrotną do f, tj. taką, że $W(f(x)) = x$ dla każdego $x \geqslant -1/e$. Funkcję tę nazywa się obecnie funkcją Lamberta, ponieważ zagadnienia z nią związane rozważane były już przez osiemnastowiecznego matematyka Johanna Heinricha Lamberta (a także przez Eulera). Przydaje się ona do opisu rozwiązań ważnych w zastosowaniach równań różniczkowych z opóźnieniem i niektórych równań fizyki kwantowej, a także, jako funkcja tworząca, w kombinatoryce. Czytelnik zechce sprawdzić, że $-\frac{3}{\ln 3} W(-\frac{1}{3}\ln 3)$ jest rozwiązaniem równania $3^x = x^3$, i ustalić, czy liczba ta jest mniejsza od 3.

Udowodnimy, że dla liczb zespolonych z dostatecznie bliskich zera (można też ograniczyć się do z rzeczywistych bez potrzeby wprowadzania zmian w dowodzie) funkcję W można przedstawić w postaci szeregu potęgowego

$$W(z) = z - \frac{2^1}{2!}z^2 + \frac{3^2}{3!}z^3 - \frac{4^3}{4!}z^4 + \ldots = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m,$$

gdzie $p_m = (-m)^{m-1}/m!$ – ponieważ $p_{m+1}/p_m \to e$, gdy $m \to \infty$, więc dla wszystkich z, dla których $|z| < 1/e$, szereg ten jest zbieżny.

Trzeba wykazać, że dla powyższego szeregu W równość $W(f(z)) = z$ jest spełniona dla wszystkich z z pewnego otoczenia zera. Przyda się nam prosta tożsamość kombinatoryczna.

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

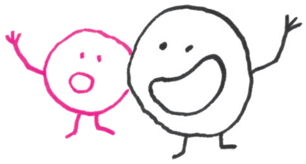
Lemat. *Dla $n = 2, 3, 4, \dots$ mamy $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^{n-1} = 0$.*

Dowód lematu: Rozważmy funkcje $g : \{1, 2, \dots, n-1\} \to \{1, 2, \dots, n\}$. Dla $k = 1, 2, \dots, n$ niech A_k oznacza $\{g : k \notin \mathrm{im}(g)\}$, czyli rodzinę tych funkcji ze zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$ w zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$, które nie przyjmują wartości k. Dla dowolnych $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$ mamy

im(g) oznacza obraz funkcji g, czyli zbiór wszystkich przyjmowanych przez nią wartości.

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = |\{g : \mathrm{im}(g) \cap \{i_1, i_2, \dots, i_k\} = \emptyset\}| = (n-k)^{n-1}.$$

Żadna z funkcji określonych na zbiorze $(n-1)$-elementowym nie może przyjmować n różnych wartości, więc $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ to rodzina wszystkich funkcji ze zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$ w zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$. Zatem ze wzoru włączeń-wyłączeń wnioskujemy, że



$$n^{n-1} = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^{n-1} = n^{n-1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^{n-1},$$

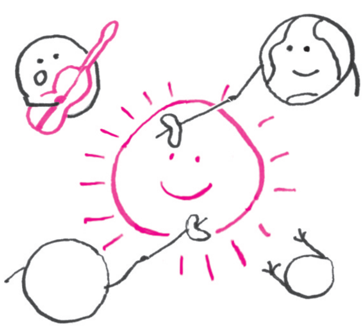
a to już jest równoważne dowodzonej tezie. $\square$

Inaczej niż w przypadku sum skończonych, zmiana kolejności wyrazów szeregu może zmienić jego sumę lub szereg zbieżny przekształcić w rozbieżny. Jeśli jednak $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$, to wyrazy szeregu $\sum_n a_n$ można dowolnie przestawiać bez wpływu na wynik sumowania.

Niech teraz s będzie taką liczbą dodatnią, że $se^s = 1/e$. Jeśli $|z| < s$, to $|z|e^{|z|} < 1/e$, więc $\sum_{m=1}^{\infty}|p_m|(|z|e^{|z|})^m < \infty$, co usprawiedliwia zmianę kolejności sumowania:

$$W(f(z)) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m e^{mz} = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^k z^k}{k!} =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_m m^k}{k!} z^{m+k} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{p_m m^{n-m}}{(n-m)!}\cdot z^n.$$

Skorzystaliśmy tu ze znanego rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg potęgowy, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$, a następnie pogrupowaliśmy składniki według potęg parametru z. Współczynnik przy z^1 jest równy 1, a dla $n \geqslant 2$ mamy



$$\sum_{m=1}^{n}\frac{p_m m^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m \cdot \frac{m^{m-1}m^{n-m}}{m!(n-m)!} = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}m^{n-1} =$$
$$= \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^{n-1} = 0,$$

na mocy lematu. Zatem wykazaliśmy, że $W(f(z)) = z$ dla wszystkich liczb zespolonych z z koła otwartego o środku w zerze i promieniu s. Zawiera się ono w spójnym podzbiorze otwartym płaszczyzny zespolonej

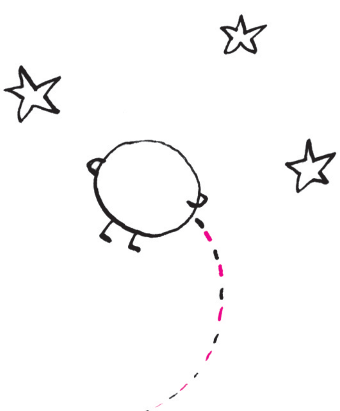
$$U = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1,\ |ze^z| < 1/e\}.$$

Czytelnik obeznany nieco z teorią funkcji analitycznych bez problemu wywnioskuje stąd, że $W(f(z)) = z$ dla $z \in U$, a więc w szczególności dla $z \in (-1, s)$. Przechodząc do granicy $z \to -1^+$, otrzymamy też równość $W(-1/e) = W(f(-1)) = -1$, czyli

Zasada identyczności: Przyjmijmy, że $K \subset U$, gdzie K jest kołem otwartym, a U pewnym spójnym otwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Jeśli funkcje analityczne $\varphi, \psi : U \to \mathbb{C}$ spełniają równość $\varphi(z) = \psi(z)$ dla wszystkich $z \in K$, to $\varphi(z) = \psi(z)$ dla wszystkich $z \in U$.

$$\sum_{m=1}^{\infty}|p_m|e^{-m} = \frac{1}{e} + \frac{2^1}{2!e^2} + \frac{3^2}{3!e^3} + \dots = 1.$$

Omówione rozwinięcie funkcji W w szereg to szczególny przypadek nieco bardziej skomplikowanego klasycznego wzoru Lagrange'a – jeśli f rozwija się w szereg potęgowy na pewnym otoczeniu zera, a ponadto $f(0) = 0$ i $f'(0) \neq 0$, to istnieje funkcja analityczna w rozwijalna na pewnym otoczeniu zera w szereg $w(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m z^m$ i taka, że $w(f(z)) = z$ dla z dostatecznie bliskich zera, a przy tym



$$p_m = \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left(z^m/f(z)^m\right)\Big|_{z=0}.$$

Gdy $f(z) = ze^z$, to $z^m/f(z)^m = e^{-mz}$, skąd łatwo otrzymać współczynniki funkcji Lamberta.