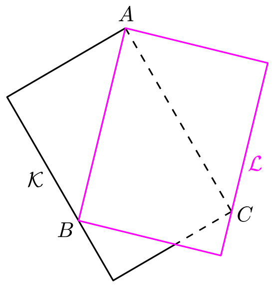
# Połowa równoległoboku

*Joanna JASZUŃSKA*

Prostokątne kartki $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$, niekoniecznie o tych samych wymiarach, położono jak na rysunku 1. Czy kartka $\mathcal{L}$ przykrywa ponad połowę kartki $\mathcal{K}$?

$[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

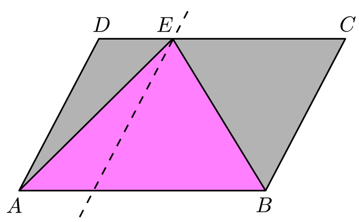



Rys. 1

W rozwiązaniu tej zagadki pomocna jest następująca obserwacja.

**Twierdzenie (∗).** *Jeśli punkt $E$ należy do boku $CD$ równoległoboku $ABCD$, to* $[ABE] = \frac{1}{2}[ABCD]$.

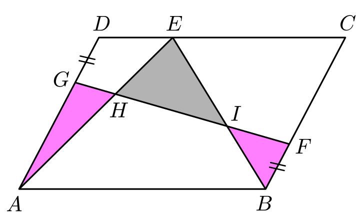
*Dowód.* Prosta przez punkt $E$, równoległa do odcinka $AD$, dzieli $ABCD$ na dwa równoległoboki (rys. 2). Trójkąt $ABE$ utworzony jest z ich połówek. □




Rys. 2. Kolorowe = szare.

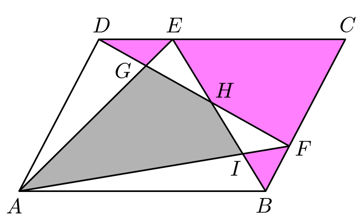
W zagadce o kartkach wystarczy teraz połączyć punkty $B$ i $C$. Kartka $\mathcal{L}$ przykrywa cały trójkąt $ABC$ i jeszcze kawałek kartki $\mathcal{K}$ – łącznie ponad połowę. □

**1.** Punkty $E$, $F$ i $G$ należą odpowiednio do boków $CD$, $BC$ i $DA$ równoległoboku $ABCD$, przy czym $BF = DG$ (rys. 3). Odcinek $FG$ przecina odcinki $AE$ i $BE$ odpowiednio w punktach $H$ i $I$. Wykaż, że $[AHG] + [BFI] = [EHI]$.




Rys. 3. Kolorowe = szare.

**2.** Punkt $E$ należy do boku $CD$ równoległoboku $ABCD$, punkt $F$ – do boku $BC$. Odcinek $DF$ przecina odcinki $AE$ i $BE$ odpowiednio w punktach $G$ i $H$. Odcinki $BE$ i $AF$ przecinają się w punkcie $I$ (rys. 4). Wykaż, że $[BFI] + [CEHF] + [DGE] = [AIHG]$.




Rys. 4. Kolorowe = szare.

**Twierdzenie (∗∗).** *Jeśli punkt $E$ leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, to* $[ABE] + [CDE] = [BCE] + [DAE]$.

*Dowód.* Dzielimy $ABCD$ na dwa równoległoboki prostą przechodzącą przez punkt $E$, równoległą do boku $AB$, i dla każdego z nich korzystamy z twierdzenia (∗). □

**3.** Wykaż, że pole dowolnego czworokąta wypukłego równe jest połowie pola równoległoboku wyznaczonego przez jego przekątne.

## Rozwiązania

**R1.** Odcinek $FG$ dzieli równoległobok $ABCD$ na dwie figury przystające. Wobec tego i na mocy twierdzenia (∗), mamy

$$[AHG]+[BFI]+[ABIH] = [ABFG] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ABE] = [EHI]+[ABIH],$$

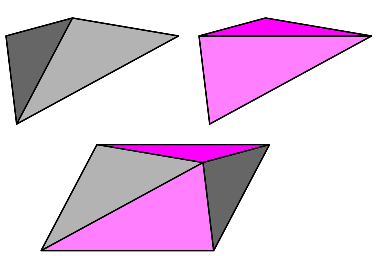
co po odjęciu od obu stron $[ABIH]$ daje tezę. □

**R2.** Korzystając dwukrotnie z twierdzenia (∗), otrzymujemy

$$[BFI]+[CEHF]+[DGE]+([ABI]+[EGH]) = [ABCD]-[DAF] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ABE] = [AIHG] + ([ABI] + [EGH]),$$

co po odjęciu od obu stron $[ABI] + [EGH]$ daje tezę. □

**R3.** Rozwiązanie, a przy okazji inny dowód twierdzenia (∗∗), na rysunku 5. □



Rys. 5. Kolorowe = szare.

## Zadania domowe

**4.** Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt $E$ należący do boku $BC$. Przez punkt $D$ prowadzimy prostą $k$ równoległą do prostej $AE$. Na prostej $k$ obieramy takie punkty $K$, $L$, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

**5.** W sytuacji z zadania 2 (rys. 4), wykaż, że $[ABI] + [EGH] = [DAG] + [FHI]$.

**6.** Punkt $E$ należy do boku $AB$ równoległoboku $ABCD$, punkt $F$ – do boku $CD$. Odcinki $AF$ i $DE$ przecinają się w punkcie $G$, odcinki $BF$ i $CE$ przecinają się w punkcie $H$. Wykaż, że

(a) $[DAG] + [BCH] = [EHFG]$,
(b) $[AEG] + [BHE] = [CFH] + [DGF]$.

Zadanie 4 pochodzi z IV Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, a rysunek 5 z książki *When Less is More*, C. Alsina i R. Nelsen, MAA 2009.