Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 566 ($WT = 1{,}97$), 567 ($WT = 2{,}50$), 568 ($WT = 1{,}20$) i 569 ($WT = 2{,}55$) z numerów 11/2013 i 12/2013

Krzysztof Magiera	Łosiów	47,36
Michał Koźlik	Gliwice	43,14
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	22,15

Liczbę 44 punktów po raz trzeci przekroczył pan Krzysztof Magiera. Gratulujemy!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 580, 581

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

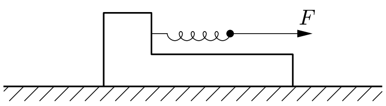
580. Do powierzchni nieważkiej sfery przymocowany jest mały koralik, który możemy traktować jak punkt materialny. Sfera leży na poziomej podstawce, w chwili początkowej koralik znajduje się w najwyższym położeniu. Zakładamy, że sfera nie ślizga się po podstawce, dopóki wywiera na nią siłę nacisku. Na jakiej wysokości nad podstawką znajdzie się koralik po wytrąceniu z położenia równowagi, gdy sfera zacznie ślizgać się po podstawce?

581. Przez płaski kondensator, wypełniony dielektrykiem o stałej dielektrycznej ε i oporze właściwym ρ, płynie prąd $I(t) = I_0 \sin \omega t$. Znaleźć amplitudę napięcia na kondensatorze. Powierzchnia okładek kondensatora wynosi S, odległość między okładkami jest równa d.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2014

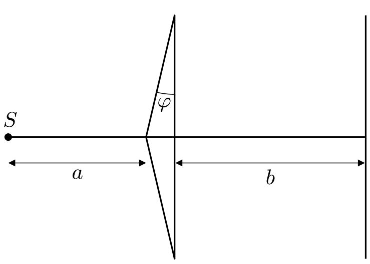
Przypominamy treść zadań:

572. Dynamometr ciągnięty jest po gładkim poziomym stole siłą $F = 4\text{N}$ (rys. 1). Co wskazuje dynamometr, jeżeli masa sprężyny równa jest masie obudowy? Dynamometr został wyskalowany w położeniu poziomym.



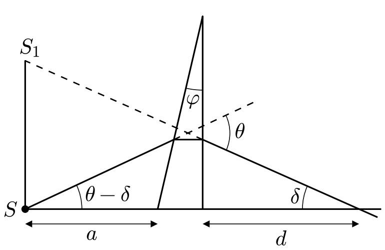
Rys. 1

573. Na bipryzmat przedstawiony na rysunku 2 pada światło monochromatyczne ze źródła punktowego S. Na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Znaleźć odległość pierwszego maksimum interferencyjnego od środka ekranu. Dane są: a – odległość źródła od bipryzmatu, b – odległość bipryzmatu od ekranu, φ – kąt łamiący każdego z pryzmatów, który jest bardzo mały, n – współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest bipryzmat, λ – długość fali światła emitowanego przez źródło. Promienie interferujące padają na ekran prawie prostopadle.



Rys. 2

572. Wskazanie dynamometru to $T = k\Delta l$, gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny, a Δl jej wydłużeniem. Gdy dynamometr jest nieruchomy, siła rozciągająca sprężynę jest taka sama wzdłuż całej sprężyny, a dowolne jednakowe odcinki sprężyny rozciągnięte są o taką samą wielkość. Gdy dynamometr porusza się z przyspieszeniem $a = F/(2M)$, gdzie M jest masą sprężyny, siła rozciągająca sprężynę w odległości x od jej końca przymocowanego do obudowy wynosi $T(x) = \dfrac{M + Mx/l}{a} = \dfrac{(1 + x/l)F}{2}$, czyli zmienia się liniowo od wartości $F/2$ do F. Podzielmy myślowo nierozciągniętą sprężynę na n jednakowych części na tyle małych, że po rozciągnięciu siłę sprężystości T_i wzdłuż każdej części możemy uznać za stałą. Współczynnik sprężystości każdej takiej części to $k_n = nk$, bo wydłużenie całej nieruchomej sprężyny jest n razy większe niż wydłużenie pojedynczej części: $\Delta l_0 = F/k = nF/k_n$. Gdy dynamometr porusza się z przyspieszeniem a, wydłużenie sprężyny wynosi $\Delta l = \sum_1^n T_i/(nk)$. Ponieważ siła $T(x)$ jest liniową funkcją x, $\sum_1^n T_i$ jest sumą szeregu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz równy jest $F/2$, a ostatni F, równą $\dfrac{n(F + F/2)}{2}$. Wskazanie poruszającego się z przyspieszeniem dynamometru wynosi: $k\Delta l = \dfrac{F + F/2}{2} = \dfrac{3}{4F} = 3$ N.



Rys. 3

573. Rozważmy dowolny promień przechodzący przez pryzmat. Oznaczmy jego kąt odchylenia w pryzmacie przez θ, a kąt przecięcia promienia wychodzącego z pryzmatu z osią optyczną przez δ (rys. 3). Dla małych kątów $\theta = \varphi(n-1)$. Niech punkt S_1 będzie przecięciem przedłużenia promienia wychodzącego z pryzmatu z prostą prostopadłą do osi optycznej przechodzącą przez S. Mamy związki: $y = a\,\mathrm{tg}(\theta - \delta) \approx (\theta - \delta)$, $d = y/\delta = a(\theta - \delta)/\delta$. Długość odcinka $|SS_1|$ wynosi $H = (a + d)\delta = a\theta = a\varphi(n-1)$ i nie zależy od kąta padania światła na pryzmat, zatem przedłużenia wszystkich promieni wychodzących z pryzmatu przecinają się w tym samym punkcie. Promienie wychodzące z dwóch pryzmatów interferują ze sobą tak, jakby pochodziły z dwóch źródeł S_1 i S_2 (od dolnego pryzmatu) odległych od siebie o $2H$. Wzór na pierwsze maksimum interferencyjne ma postać: $2H \sin \alpha = \lambda$. Szukana odległość między maksimami wynosi: $x = (a + b)\alpha = \dfrac{(a+b)\lambda}{2a\varphi(n-1)}$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 669 ($WT = 1{,}38$) i 670 ($WT = 2{,}44$) z numeru 11/2013

Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,87
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Olszewski	Warszawa	38,48
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32
Paweł Duch	Bielawa	36,83
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	32,75
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,72

Zadania z matematyki nr 683, 684

Redaguje Marcin E. KUCZMA

683. Dane są dwa przystające okręgi, przecinające się w punktach A i B. Punkt X leży na jednym z tych okręgów, punkt Y na drugim, przy czym prosta XY nie przechodzi ani przez A, ani przez B, ani przez środek odcinka AB. Punkt Z jest wierzchołkiem równoległoboku $XBYZ$. Dowieść, że okręgi opisane na trójkątach AXZ, AYZ są przystające do dwóch danych okręgów.

684. Wykazać, że dla żadnej pary różnych liczb pierwszych p, q układ równań
$$a^2 + b^2 = p, \qquad x^2 + y^2 = q, \qquad (a-x)^2 + (b-y)^2 = |p-q|$$
nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych a, b, x, y.

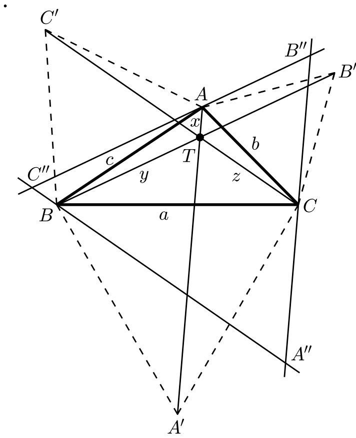
Zadanie 684 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2014

Przypominamy treść zadań:

675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a, b, c, o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od $120°$, znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d. Dowieść, że zachodzi równość $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 3(a^4+b^4+c^4+d^4)$.



675. Niech p_n będzie prawdopodobieństwem wylosowania słowa *dobrego*, tj. takiego, w którym dwie wyróżnione litery nie sąsiadują, zaś $q_n = 1 - p_n$ prawdopodobieństwem wylosowania słowa *złego*. Zapiszmy te wartości jako sumy $p_n = p'_n + p''_n$, $q_n = q'_n + q''_n$, gdzie pojedynczy prim odpowiada sytuacjom, gdy ostatnia litera słowa jest niewyróżniona, a podwójny prim – sytuacjom, gdy ostatnia litera jest wyróżniona. Mamy zależności rekurencyjne
$$p'_n = p_{n-1}\cdot\tfrac{22}{24}, \qquad q'_n = q_{n-1}\cdot\tfrac{22}{24},$$
$$p''_n = p'_{n-1}\cdot\tfrac{2}{24} + p''_{n-1}\cdot\tfrac{1}{24}, \qquad q''_n = q_{n-1}\cdot\tfrac{2}{24} + p''_{n-1}\cdot\tfrac{1}{24};$$
wyjaśnienie ostatniej z nich: złe n-słowo, zakończone jedną z wyróżnionych liter, można uzyskać z dowolnego złego $(n-1)$-słowa (dopisując na końcu jedną z tych dwóch liter), bądź z dobrego $(n-1)$-słowa, zakończonego wyróżnioną literą (dopisując drugą wyróżnioną literę); uzasadnienie pozostałych zależności jest podobne. Odejmując dwie ostatnie równości otrzymujemy
$$\begin{aligned} p''_n - q''_n &= \tfrac{1}{12}(p'_{n-1} - q_{n-1}) = \tfrac{1}{12}\Big(p_{n-2}\cdot\tfrac{22}{24} - (1-p_{n-1})\Big)\\ &= \tfrac{1}{12}p_{n-1} + \tfrac{11}{144}p_{n-2} - \tfrac{1}{12}.\end{aligned}$$
Jednocześnie ta sama różnica daje się zapisać jako
$$\begin{aligned} p''_n - q''_n &= (p_n - p'_n) - (q_n - q'_n)\\ &= (p_n - q_n) - \Big(p_{n-1}\cdot\tfrac{22}{24} - q_{n-1}\cdot\tfrac{22}{24}\Big)\\ &= (2p_n - 1) - \tfrac{11}{12}(2p_{n-1} - 1).\end{aligned}$$
Przyrównanie prawych stron uzyskanych równości daje jednorodną rekurencję liniową drugiego rzędu
$$p_n = \frac{23}{24}\,p_{n-1} + \frac{11}{288}\,p_{n-2}.$$
Wraz z wartościami początkowymi $p_0 = p_1 = 1$ wyznacza ona cały ciąg (p_n). Numerycznie można się przekonać, że $p_{207} > 0{,}5014$, $p_{208} < 0{,}4999$, a zatem liczba, o którą pyta zadanie, wynosi 208.

Oczywiście można też uzyskać zwykłą metodą rozwiązanie tej ostatniej rekurencji w postaci
$$p_n = A\alpha^n + B\beta^n; \qquad \alpha = \frac{23+\delta}{48}, \qquad \beta = \frac{23-\delta}{48},$$
$$A = \frac{1}{2} + \frac{25}{2\delta}, \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{25}{2\delta} \qquad (\delta = \sqrt{617})$$
i zauważyć, że $p_n > A\alpha^n$ dla n nieparzystych, $p_n < A\alpha^n$ dla n parzystych. Wystarczy więc sprawdzić, że $A\alpha^{207} > 0{,}5 > A\alpha^{208}$, czyli że liczba $(\ln 2A)/(-\ln\alpha)$ leży pomiędzy 207 i 208. Tak w istocie jest; jej przybliżona wartość wynosi 207,89.

676. Wzór dany do udowodnienia przedziwnie przypomina wzór z zadania 658 (nr 3/2013) – to nie przypadek. Tam była mowa o czworościanie; ale w omówieniu rocznym (nr 2/2014) był dyskutowany przypadek dowolnego wymiaru: jeśli w przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ umieścimy sympleks foremny o krawędzi k, to dla dowolnego punktu tej przestrzeni, leżącego w odległościach $d_1, \ldots, d_n$ od jego wierzchołków, zachodzi równość
$$\Big(k^2 + d_1^2 + \ldots + d_n^2\Big)^2 = n\Big(k^4 + d_1^4 + \ldots + d_n^4\Big).$$
Tu zastosujemy skromniutki jego wariant: $n = 3$.

Niech ABC będzie trójkątem rozważanym obecnie, o bokach a, b, c. Punkt, o którym mowa, to *punkt Toricellego* (lub *punkt Fermata*) T; założenie o kątach $< 120°$ gwarantuje, że T leży wewnątrz trójkąta, na przecięciu odcinków AA', BB', CC' – gdzie litery z primami oznaczają wierzchołki trójkątów równobocznych BCA', CAB', ABC', zbudowanych na zewnątrz trójkąta ABC – to własność dobrze znana (wyprowadzenie i komentarze można znaleźć w wielu miejscach; choćby `http://pl.wikipedia.org/wiki/Punkt_Fermata`).

Przez punkty C, A, B prowadzimy proste równoległe odpowiednio do AA', BB', CC'; przecinając się, tworzą one trójkąt równoboczny $A''B''C''$ (oznaczenia jak na rysunku). W trapezach równoramiennych (o kątach $60°$, $120°$) $CTBA''$, $ATCB''$, $BTAC''$ zachodzą równości
$$|A''T| = |BC| = a, \qquad |B''T| = |CA| = b, \qquad |C''T| = |AB| = c.$$
Z rysunku widać ponadto, że trójkąt $A''B''C''$ ma bok długości $|TA| + |TB| + |TC|$, czyli d.

Wzór przytoczony na wstępie stosujemy (w wersji $n = 3$) do trójkąta $A''B''C''$ oraz punktu T, leżącego w odległościach $d_1 = a$, $d_2 = b$, $d_3 = c$ od A'', B'', C''; teraz $k = d$, i mamy tezę zadania.

Takie rozwiązanie jest zgodne z intencją pana Tomasza Ordowskiego (który zaproponował oba te zadania, 658 i 676). Możliwe jest też rozwiązanie znacznie bardziej bezpośrednie (choć i bardziej rachunkowe). Odcinki TA, TB, TC tworzą kąty po $120°$. Oznaczając ich długości przez x, y, z, mamy $a^2 = y^2 + z^2 + yz$ (i podobnie b^2, c^2). Podstawiając te wyrażenia do wzoru z tezy zadania dostajemy po obu stronach wielomiany symetryczne zmiennych x, y, z, dające się wyrazić przez podstawowe formy symetryczne $d = x+y+z$, $e = yz+zx+xy$, $f = xyz$ (to kilka linijek prostych przekształceń). Zarówno po lewej, jak i po prawej stronie, wyrazy zawierające f ulegają redukcji; i jedna, i druga strona sprowadza się do wyrażenia $(3d^2 - 3e)^2$.