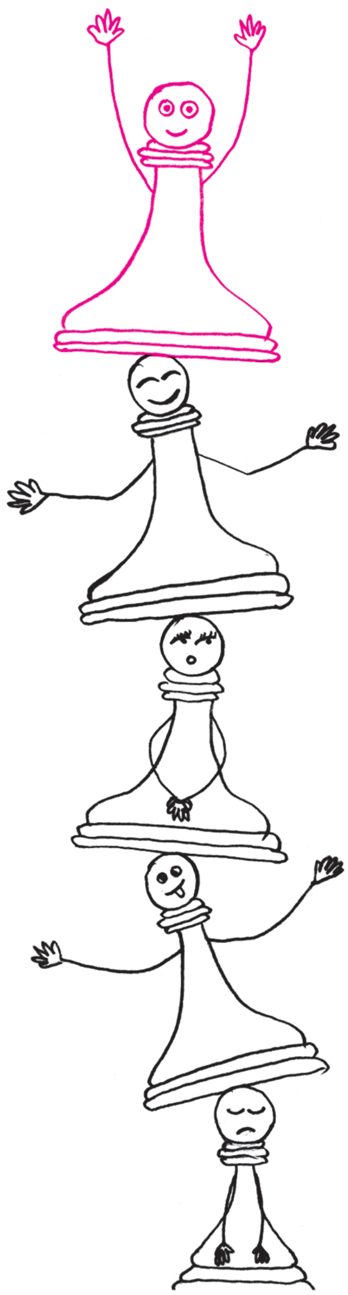
Szczęście w zbiorach mierzalnych

*Eryk KOPCZYŃSKI**

Wyobraźmy sobie następującą grę. Mamy planszę o polach ponumerowanych od 0 do 100 i dwa pionki, stojące na początku na polu o numerze 0. Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz rzuca monetą i jeśli wypadnie reszka, to przesuwa swój pionek o 1 pole, a jeśli orzeł – o 5 pól. Wygrywa ten, kto pierwszy dojdzie do pola o numerze 100.

Mało ciekawa gra, prawda? Zależy tylko od szczęścia, a nie od podejmowania słusznych decyzji. Dodajmy więc do niej jakiś element decyzyjny. Powiedzmy, że przed wykonaniem ruchu gracz może wybrać spośród dwóch wariantów: A i B. Jeśli wybierze wariant A, to rzuca monetą i wykonuje ruch tak, jak napisano wyżej. Jeśli wybierze bardziej ryzykowny wariant B, to w przypadku wyrzucenia orła rusza się do przodu o 20 pól, ale w przypadku wyrzucenia reszki wraca na pole zerowe. Żeby nasza gra zawsze się kończyła, przyjmijmy, że jeśli 10 razy danemu graczowi wypadnie reszka podczas stosowania wariantu B, to ten gracz przegrywa.

Ta gra jest trochę ciekawsza (są sytuacje, w których bardziej opłaca się zastosować wariant A, i sytuacje, w których lepszy jest wariant B), ale wciąż zależy od szczęścia. No ale co to jest szczęście? Może dałoby się jakoś włączyć szczęście do samej gry, tak, żeby było deterministycznym elementem gry, a nie losowym?



Przyjmijmy, że nasze szczęście jest liczbą z przedziału $[0,1)$. (Szczęście zawsze rozpatrujemy z punktu widzenia konkretnego gracza – jeśli nasze szczęście jest równe s, to szczęście przeciwnika wynosi $1-s$.) Szczęście równe 1 oznaczałoby, że na monecie zawsze będzie wypadało to, co chcemy. Szczęście równe 0 oznacza, że zawsze wypada to, czego chce przeciwnik. Pośrednie wartości oznaczają, że obaj gracze mają coś do powiedzenia. Przykładowo, jeśli szczęście jest większe niż $\frac{1}{2}$, to powinniśmy mieć możliwość wybrania wyniku rzutu monetą, ale będzie się to działo kosztem naszego szczęścia w dalszej części gry.

Dokładniej, szczęście działa w następujący sposób. Powiedzmy, że nasze szczęście w pewnym momencie jest równe s, a reguły gry z elementem losowym mówią, że powinniśmy w tym momencie rzucić monetą. Zamiast to robić, decydujemy, jak podzielić s między oba możliwe wyniki. Wybieramy dwie liczby, s_R i s_O, obie z przedziału $[0,1]$ i takie, że ich średnia jest równa s. Przeciwnik wybiera wynik rzutu – jeśli wybierze reszkę, to nasze szczęście zmienia się na s_R, w przeciwnym przypadku nasze szczęście zmienia się na s_O. Nie wolno mu wybrać takiego wyniku, któremu przypisaliśmy wartość naszego szczęścia 1. Zauważmy, że dla każdego rzutu monetą to my wybieramy podział s, a przeciwnik wybiera wynik rzutu, niezależnie od tego, do którego z graczy należał rzut monetą.

Przykładowo, wyobraźmy sobie taką prostą grę: gracze rzucają monetą na przemian, zaczyna przeciwnik, a wygrywa ten, kto wyrzuci orła. Zacznijmy ze szczęściem $s=0{,}7$. Gramy w następujący sposób: w pierwszym ruchu przyporządkowujemy $s_O=1$, $s_R=0{,}4$, dzięki czemu blokujemy przeciwnikowi orła i „wypada reszka", ale nasze szczęście spada do 0,4. Teraz, oczywiście, przeciwnik nie wybierze orła (bo jest nasz ruch), także możemy mu przypisać dowolnie małą wartość szczęścia i przyporządkowujemy $s_O=0$, $s_R=0{,}8$. Wypada reszka, nasze szczęście wzrosło do 0,8. Po wymuszeniu reszki w ten sam sposób, co ostatnio, szczęście spada do 0,6. Teraz możemy przyporządkować $s_R=1$, $s_O=0{,}2$, zatem wypada orzeł i wygrywamy. Można pokazać, że wygrywamy dla wartości szczęścia powyżej $\frac{2}{3}$, dla wartości poniżej $\frac{2}{3}$ wygrywa przeciwnik (dla $s=\frac{2}{3}$ gra się nie skończy, a właściwie skończy się wtedy, gdy któryś z graczy się znudzi i wykona ruch prowadzący do zakończenia gry jego przegraną).

Co właściwie oznacza szczęście? Jeśli gra jest skończona (na przykład w powyższej grze uznajemy, że jeśli po 100 rzutach nie doszło do konkluzji, to następny rzut decyduje), to można udowodnić, że jeśli w danym momencie szczęście jest większe od prawdopodobieństwa wygrania gry losowej przez przeciwnika (przy założeniu, że obaj gracze stosują optymalne strategie), to my mamy strategię wygrywającą. Jeśli jest mniejsze, to strategię wygrywającą ma przeciwnik. Strategia polega na tym, by wszystkie sytuacje, w których nie mamy szans wygrać, blokować (korzystając z wysokiej wartości szczęścia), a w pozostałych grać tak, by powyższy warunek był zachowany (szczęście ma być zawsze większe niż prawdopodobieństwo). Szczegóły dowodu zostawiamy Czytelnikowi. Polecamy też się zastanowić, jak dostosować ten system do popularnych gier z użyciem kostki, od (dwuosobowego) chińczyka do backgammona. Albo do gier, w których ważny jest wynik (a nie tylko, kto wygrał, a kto przegrał), lub też do gier, w których losowość wynika stąd, że obaj gracze podejmują decyzje jednocześnie

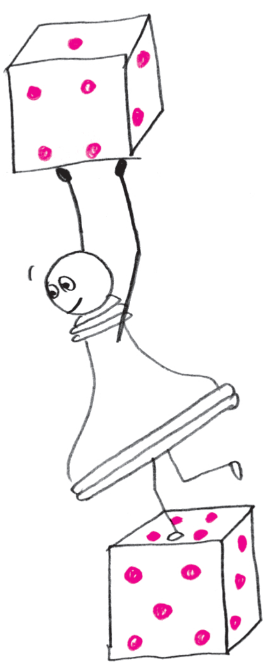
*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

(jak kamień-nożyce-papier). Zauważmy również, że gra ma niesymetryczny charakter, bo mamy dwóch graczy: gracz wybierający podział („dzielący") i gracz wybierający wynik rzutu („rządzący"). Te dwie role mogą być na stałe przypisane do graczy, można też się zastanowić nad systemem, w którym role się zmieniają.

* * *

W powyższej grze zarządziliśmy, żeby rozgrywka zawsze była skończona. Jednak można wymyślić gry, w których rozgrywka czasami albo zawsze jest nieskończona. W przypadku rozgrywek nieskończonych również w jakiś sposób określamy zwycięzcę. Przykład takiej gry nieskończonej? Mamy pewien podzbiór $A \subseteq [0,1]$ i dwa pionki, z których jeden stawiamy w punkcie 0, a drugi w punkcie 1. Gracze na przemian wybierają jeden z pionków i stawiają go w punkcie dokładnie pośrodku pomiędzy poprzednimi pozycjami pionków. Tak więc w pierwszym ruchu my przestawiamy jeden z pionków do punktu $\frac{1}{2}$, powiedzmy ten, który wcześniej stał w 1, a w drugim ruchu przeciwnik wybiera, który z pionków ma przenieść do punktu $\frac{1}{4}$ (średnia 0 i $\frac{1}{2}$). Jeśli wybrał przestawienie pionka z 0, to my przestawiamy jeden z pionków do $\frac{3}{8}$, i tak dalej. „Po nieskończonym czasie" oba pionki będą stały w tym samym punkcie granicznym. Jeśli ten punkt graniczny należy do zbioru A, to my wygrywamy, jeśli nie, to wygrywa przeciwnik. Można pokazać np. że jeśli zbiór A jest zbiorem liczb wymiernych, to w takiej grze nieskończonej przeciwnik ma strategię wygrywającą (chociaż w skończonej grze pionki zawsze będą stały na liczbach wymiernych) – strategia ta polega na tym, że przeciwnik ustawia wszystkie liczby wymierne w ciąg, i w kolejnych swoich ruchach dba o to, żeby wykluczać kolejne liczby z tego ciągu jako możliwe punkty graniczne.

W powyższej grze wybory „świadome" można zastąpić wyborami losowymi (pionek przenoszony do środka wybieramy losowo). Wtedy punkt graniczny jest wybierany całkowicie losowo, zatem prawdopodobieństwo, że my wygramy, jest równe prawdopodobieństwu, że losowo wybrany punkt należy do zbioru A.



Czy podany wyżej sposób na zamianę gry losowej na grę deterministyczną „ze szczęściem" można również zastosować do powyższej gry nieskończonej (i innych)? Zastanówmy się, co by to oznaczało. Jeśli szczęście jest większe niż prawdopodobieństwo zwycięstwa, to my mamy strategię wygrywającą, a jeśli mniejsze, to wygrywa przeciwnik. Zatem udałoby nam się zdefiniować prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany punkt nie należy do zbioru A, przy użyciu gier. Dla za małych wartości szczęścia strategię wygrywającą ma przeciwnik, a dla za dużych my. Zatem możemy zdefiniować prawdopodobieństwo jako najmniejszą wartość szczęścia, przy której my mamy strategię wygrywającą w danej grze (a dokładniej kres dolny zbiorów tych wartości).

Skądinąd wiadomo, że w standardowej matematyce (używającej aksjomatu wyboru) istnieją zbiory niemierzalne, tzn. takie, dla których wartości prawdopodobieństwa nie da się określić. (Jednym z przykładów tego zjawiska może być paradoks Banacha–Tarskiego: można udowodnić, że kulę w przestrzeni trójwymiarowej można podzielić na części, z których można następnie złożyć dwie różne kule, każda takiej samej wielkości jak oryginalna. Gdyby wszystkie zbiory były mierzalne, takiego czegoś nie dałoby się zrobić.)

Jan Mycielski i Hugo Steinhaus w 1962 roku sformułowali aksjomat determinacji. Wynika z niego fałszywość aksjomatu wyboru, za pomocą którego dowodzi się istnienia zbiorów niemierzalnych. W teorii mnogości z aksjomatem determinacji każdy zbiór liczb rzeczywistych jest mierzalny w sensie Lebesgue'a.

Czy to oznacza, że konstrukcja gry „ze szczęściem" nie działa dla gier nieskończonych? Okazuje się, że działa – można udowodnić, że jeśli strategię wygrywającą mamy my, to miara zewnętrzna (ograniczenie górne prawdopodobieństwa) dopełnienia A jest mniejsza niż s, a jeśli przeciwnik, to miara wewnętrzna (ograniczenie dolne) jest większa. Zauważmy, że gdyby dla każdej wartości szczęścia któryś z graczy miał strategię wygrywającą, to zbiór A byłby mierzalny (bo miara wewnętrzna jest większa lub równa wartości granicznej, a zewnętrzna jest mniejsza lub równa, więc gdy miara zewnętrzna jest mniejsza lub równa od miary wewnętrznej, to obie muszą być równe). Problem w tym, że istnieją gry, dla których żaden z graczy nie ma strategii wygrywającej – takie właśnie gry pojawiają się dla niemierzalnych zbiorów A. Można rozważać teorię, w której zamiast aksjomatu wyboru przyjmujemy aksjomat, że w każdej grze jeden z graczy ma strategię wygrywającą. Wtedy wszystkie zbiory są mierzalne i rzeczy takie jak paradoks Banacha–Tarskiego nie mogą mieć miejsca.

Artykuł został zainspirowany pracami Donalda A. Martina.