Punkty na prostej

Joanna JASZUŃSKA

Zbiór nazywamy *przeliczalnym*, jeśli jego elementy można ustawić w ciąg.

W *deltoidzie* 7/2013 wykazaliśmy, że odcinek nie jest przeliczalny, posługując się tzw. metodą przekątniową Cantora. Tym razem udowodnimy ten sam fakt, wykorzystując pewną dwuosobową grę, której „planszą” jest zbiór $(0,1)$.

Gra. Ania i Bartek grają w następującą grę. Najpierw ustalili wspólnie pewien podzbiór W odcinka $(0,1)$. Następnie Ania wybiera dowolną liczbę $a_1 \in (0,1)$, po czym Bartek wybiera $b_1 \in (a_1, 1)$. W kolejnych ruchach, które wykonują na przemian, każdy gracz musi wybrać liczbę pomiędzy dwiema ostatnio wybranymi, czyli $a_n \in (a_{n-1}, b_{n-1})$ oraz $b_n \in (a_n, b_{n-1})$ dla $n > 1$.

Ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry, a więc ma granicę $g \in (0,1)$. Jeśli $g \in W$, to wygrywa Ania, w przeciwnym przypadku – Bartek.

Strategia. Wykażemy, że jeśli zbiór W jest co najwyżej przeliczalny, to Bartek ma strategię wygrywającą. Dla $W = \emptyset$ na pewno $g \notin W$, więc Bartek wygra. Dla $W \neq \emptyset$ ustawmy elementy zbioru W w nieskończony ciąg $w_1, w_2, w_3, \ldots$ (jeśli W jest skończony, powtarzamy ostatni element). Niech Bartek dla każdego n wybiera $b_n = w_n$, o ile jest to zgodne z zasadami gry, a w przeciwnym przypadku niech wybiera dowolne dozwolone b_n.

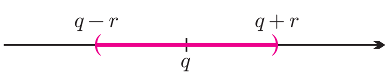
Dla każdego n zachodzi $a_n < g < b_n$. Gdyby bowiem $b_n \leqslant g$ dla pewnego n, to dla każdego k także $a_k < b_n \leqslant g$, więc g nie byłoby granicą ciągu (a_n). Podobnie nie istnieje takie n, że $a_n \geqslant g$.

W ten sposób dla każdego n albo $w_n = b_n$, albo w_n było dla Bartka niedostępne, czyli $w_n \leqslant a_n$ lub $w_n \geqslant b_{n-1} > b_n$. Wobec tego dla żadnego n liczba w_n nie należy do przedziału (a_n, b_n). Stąd żadna z liczb w_n nie jest równa g, czyli $g \notin W$. Opisana strategia faktycznie jest więc dla Bartka wygrywająca.

Morał. Oczywiście jeśli $W = (0,1)$, grę wygrywa Ania niezależnie od przebiegu rozgrywki. Wobec powyższego oznacza to, że zbiór $(0,1)$ nie jest przeliczalny.

Dalsze wnioski z tej gry: `http://people.math.gatech.edu/~mbaker/pdf/realgame.pdf`.

W *deltoidzie* 7/2013 wykazaliśmy też, że liczby wymierne tworzą zbiór przeliczalny. Zajmiemy się teraz przykrywaniem ich kolorowymi odcinkami.



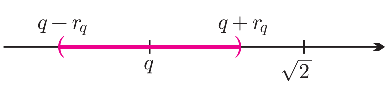
Rys. 1. *Otoczenie o promieniu r punktu q.*

Zamalujemy całą prostą... Dana jest liczba $r > 0$. Dla każdej liczby wymiernej zamalujmy wszystkie punkty z osi liczb rzeczywistych odległe od niej o mniej niż r (rys. 1). Czy niezależnie od wyboru r, pomalujemy w ten sposób całą prostą?

Zbiór liczb wymiernych jest *gęsty* w zbiorze liczb rzeczywistych, co oznacza, że pomiędzy dowolnymi dwiema liczbami rzeczywistymi zawsze istnieje liczba wymierna.

Okazuje się, że tak. Aby upewnić się, że liczba rzeczywista x zostanie zamalowana, rozważmy odcinek $(x-r, x+r)$. Należy do niego pewna liczba wymierna q. Odległość x od q jest mniejsza niż r, zatem x zostanie zamalowany, gdy malować będziemy otoczenie punktu q o promieniu r.

... a może niekoniecznie całą? Dla każdej liczby wymiernej q zamalujmy wszystkie punkty z osi liczb rzeczywistych odległe od niej o mniej niż pewna *zależna od q* dodatnia wielkość r_q. Czy niezależnie od wyboru r_q pomalujemy całą prostą?



Rys. 2. Otoczenie o promieniu r_q punktu q.

Okazuje się, że niekoniecznie! Dla każdej liczby wymiernej q ustalmy r_q równe połowie odległości pomiędzy q a liczbą $\sqrt{2}$ (rys. 2). Wówczas liczba $\sqrt{2}$ nie zostanie zamalowana, gdyż od każdej liczby wymiernej q jest odległa o więcej niż r_q.

Zamalujemy dowolnie mało! Nietrudno zmodyfikować powyższe rozumowanie, by zostawić niezamalowane dwie liczby niewymierne, np. $\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}$. Czy można tak dobrać r_q, by zamalować istotnie mniejszą część prostej?

Ustawmy liczby wymierne w ciąg $q_1, q_2, q_3, \ldots$ i niech $r_{q_n} = 1/2^n$ dla każdej liczby wymiernej q_n. Wtedy dla q_1 malujemy jej otoczenie o promieniu $1/2$, a więc odcinek o długości 1, dla q_2 – otoczenie o promieniu $1/4$, czyli odcinek o długości $1/2$ etc. Łączna długość zamalowanej w ten sposób części prostej nie przekracza

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 2.$$

Pomalowaliśmy wszystkie liczby wymierne, a jednocześnie praktycznie cała prosta pozostała niezamalowana! Co więcej, zamalowana część prostej może mieć dowolnie małą długość – wystarczy odpowiednio zmniejszyć wszystkie r_{q_n}.