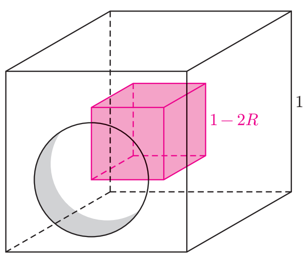
mała delta

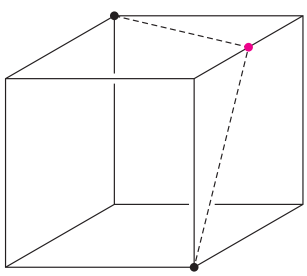
Kto by się spodziewał,

że prawdziwe jest stwierdzenie:

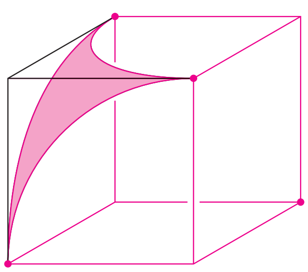
jeśli w sześcianie mieszczą się trzy jednakowe kulki, to zmieści się też czwarta tej samej wielkości!



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Aby to uzasadnić, stwórzmy najtrudniejszą sytuację – umieśćmy w sześcianie trzy kulki największe, jak to tylko jest możliwe. Przyjmijmy, że sześcian ma krawędź o długości 1. Jaki wtedy jest promień takich największych kulek?

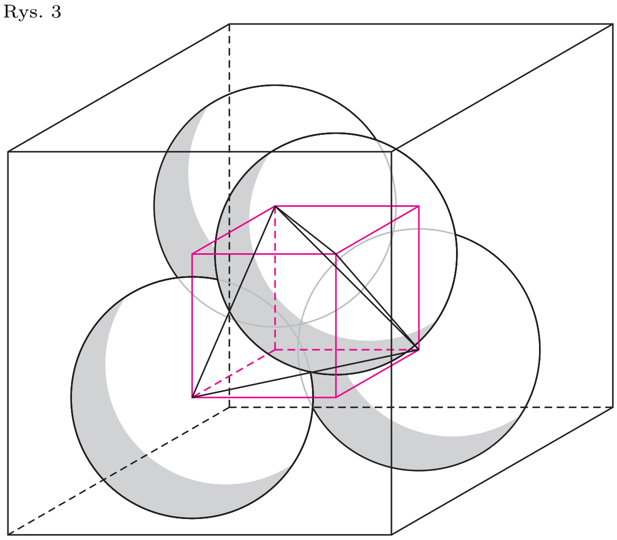
Aby odpowiedzieć na to pytanie, zbadajmy, gdzie leży w sześcianie środek zawartej w nim kulki o promieniu R. Odpowiedź jest na rysunku 1 – oczywiście, w odległości co najmniej R od ścian sześcianu, czyli w mniejszym sześcianiku o krawędzi $1-2R$. Oznaczmy tę liczbę przez k.

Nasze zadanie sprowadza się teraz do znalezienia takich trzech punktów w tym sześcianiku, aby najmniejsza z odległości między nimi (oznaczmy ją d) była jak największa – w nich umieścimy środki naszych kulek: ich promienie będą równe $d/2$.

Pomysł, by zacząć od obrania dwóch najdalszych punktów w sześcianiku (czyli odległych o $k\sqrt{3}$), daje nam $d = k\sqrt{5}/2$. Faktycznie (rys. 2) kolorowy punkt ma taką odległość od obranych punktów czarnych, a jakiekolwiek jego poruszenie w sześcianiku zmniejsza jego odległość od jednego z nich.

Okazuje się, że ten wynik można poprawić, zaczynając „słabiej", czyli nie od punktów położonych na końcach przekątnej sześcianiku, lecz na końcach przekątnej jego ściany. Takie punkty są odległe o $k\sqrt{2}$. Jak łatwo spostrzec, każdy wierzchołek sześcianiku należy do trzech ścian, więc do wyboru na pozostałe dwa „stanowiska" najbardziej odległych punktów mamy punktów aż trzy. Rysując sferę o środku w wierzchołku sześcianiku i promieniu $k\sqrt{2}$ (rys. 3), bez trudu stwierdzamy, że poruszenie dowolnego z punktów spowoduje zmniejszenie jego odległości od co najmniej dwóch spośród pozostałych. Można więc jako środki trzech możliwie największych kulek w sześcianie jednostkowym wybrać dowolne trzy spośród tak wyróżnionych wierzchołków sześcianiku, bo nietrudno stwierdzić, że $k\sqrt{5}/2 < k\sqrt{2}$.

Mamy zresztą nie tylko położenie środków największych kulek, ale też i ich promienie, bo z $k = 1-2R$ i $2R = k\sqrt{2}$ wynika $R = 1-\sqrt{2}/2$.



Rys. 4

Patrząc na rysunek 3, widzimy też, że „niechcący" dowiedliśmy zdanie rozpoczynające ten tekst. Cztery kulki zostały sportretowane na rysunku 4. Oczywiście, mniejsze kulki też zmieszczą się w sześcianie.

Łatwo zauważyć tu pole do dalszych zadań. Można sprawdzić, że gdy w sześcianie mieści się jedna kulka, to nie zawsze da się włożyć tam jeszcze jedną taką samą, podobnie będzie dla dwóch – ale jak będzie dla pięciu, sześciu itd.? Wydaje mi się, że początkowe stwierdzenie będzie też prawdziwe dla czworościanu foremnego – ale czy to prawda? A czy dałoby się sformułować podobne (i prawdziwe) stwierdzenia dla innych wielościanów? No i można też zadać pytanie o maksymalny rozmiar n jednakowych kulek mieszczących się w jednostkowym sześcianie – dla $n=1$ mamy $1/2$, dla $n=2$ jest to $\sqrt{2}/2$, dla $n=3$ (i $n=4$) obliczyliśmy przed chwilą, dla $n=8$ mamy $1/4$, ale co dla innych n?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS