Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

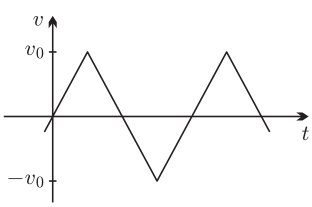
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2014

Zadania z fizyki nr 578, 579

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

578. Ciało znajduje się na desce nachylonej pod kątem α do poziomu. Deska wykonuje podłużne oscylacje: jej prędkość zmienia się z dużą częstością w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć średnią prędkość ciała, wiedząc, że amplituda zmian prędkości wynosi v_0, a współczynnik tarcia ciała o deskę jest równy μ.



579. Reakcja jądrowa ${}^{14}\mathrm{N} + {}^{4}\mathrm{He} \to {}^{17}\mathrm{O} + {}^{1}p$ może zachodzić, gdy energia kinetyczna cząstek α padających na nieruchome jądra azotu przewyższa energię progową $E_p = 14{,}5$ MeV. O ile energia kinetyczna cząstek α musi przewyższać energię progową, aby powstające w wyniku reakcji protony miały zerową prędkość?

Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

570. Pręt o długości l, promieniu r i masie m porusza się wewnątrz pionowej rury o promieniu $R \ll l$, wypełnionej nieściśliwą cieczą o gęstości ρ, wzdłuż jej osi. Gęstość pręta jest mniejsza od gęstości cieczy. Znaleźć przyspieszenie pręta. Opory ruchu (lepkość cieczy) można zaniedbać.

571. W pionowej, wąskiej rurce o długości $2l$ dolny koniec jest zamknięty, a górny otwarty. W dolnej połowie znajduje się gaz doskonały o temperaturze T_1, górna połowa jest wypełniona rtęcią. Ciśnienie zewnętrzne jest równe ciśnieniu słupka rtęci o wysokości l. Do jakiej temperatury wystarczy ogrzać gaz w rurce, aby cała rtęć została z niej wyparta?

570. Pręt porusza się do góry i w danej chwili ma prędkość v. Ciecz wypierana przez górny koniec pręta przemieszcza się w dół i wypełnia miejsce zwolnione przez dolną część pręta. Pomijając niewielkie obszary w pobliżu końców pręta, można przyjąć, że prędkość cieczy v_1 między prętem i ściankami rury jest wszędzie taka sama. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, mamy związek: $\pi r^2 v = \pi(R^2 - r^2)v_1$. Energię kinetyczną poruszającej się cieczy o masie m_c możemy zapisać w postaci: $m_c\frac{v_1^2}{2} = \pi(R^2-r^2)l\rho\frac{v_1^2}{2} = m_1\frac{v^2}{2}$, gdzie $m_1 = V\rho\frac{r^2}{R^2-r^2}$, $V = \pi r^2 l$ jest objętością pręta. Zasada zachowania energii ma postać:

$$V\rho g h - mgh = (m+m_1)\frac{v_2}{2},$$

gdzie h jest wysokością, na jaką podniósł się pręt, gdy osiągnął prędkość

$$v = \sqrt{\frac{2gh(V\rho - m)}{m+m_1}}.$$

Jest to prędkość końcowa w ruchu jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $a = \frac{(\pi r^2 l\rho - m)g}{m+m_1}$. Pręt porusza się, jakby jego masa zwiększyła się o m_1. Siła, z jaką poruszająca się ciecz działa na pręt, dana jest wzorem:

$$F = m(a+g) = \frac{mg(V\rho + m_1)}{m+m_1}.$$

571. Rozważmy stan równowagi, w którym słupek gazu w rurce ma wysokość x. Temperaturę gazu $T(x)$ możemy otrzymać z równania Clapeyrona: $p(x)xS = nRT(x)$, gdzie S jest powierzchnią przekroju rurki, a warunek równowagi ciśnień ma postać $p(x) = \rho g(3l - x)$, gdzie ρ jest gęstością rtęci. Temperatura jest kwadratową funkcją x:

$$T(x) = \frac{\rho g S(-x^2 + 3lx)}{nR}$$

i ma maksimum dla $x = \frac{3l}{2}$. Temperatura T_0, do której wystarczy ogrzać gaz w rurce, wynosi więc $T_0 = \frac{9\rho g S l^2}{4nR}$. Uwzględniając, że w stanie początkowym $T_1 = \frac{2\rho g S l^2}{nR}$, otrzymujemy ostatecznie:

$$T_0 = \frac{9}{8}T_1.$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
667 ($WT = 2{,}35$) i 668 ($WT = 1{,}60$)
z numeru 10/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	45,50
Adam Dzedzej	Gdańsk	44,28
Marcin Małogrosz	Warszawa	44,25
Janusz Fiett	Warszawa	44,02
Jędrzej Garnek	Poznań	40,03
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,63
Wojciech Maciak	Warszawa	38,32

Pan Adam Dzedzej kończy swoją drugą rundę „44". Panowie Rami Ayoush, Marcin Małogrosz, Janusz Fiett to nowe twarze – witamy w Klubie 44. Dawno nie mieliśmy tak gromadnego jednoczesnego przekroczenia magicznej bariery!

Zadania z matematyki nr 681, 682

681. Mamy dwa stosy bierek. Dwaj gracze wykonują ruchy na przemian. W jednym ruchu wolno: usunąć jedną bierkę (z dowolnie wybranego stosu); usunąć po jednej bierce z obu stosów; przełożyć jedną bierkę z jednego (dowolnego) stosu na drugi. Gra kończy się, gdy wszystkie bierki znikną. Wygrywa gracz, który zdjął ostatnią bierkę. W zależności od liczności stosów w stanie początkowym, ustalić, czy i który z graczy (rozpoczynający czy jego przeciwnik) ma strategię wygrywającą.

682. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek
$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$
Udowodnić, że
$$\frac{\sqrt{x_1} + \ldots + \sqrt{x_n}}{n-1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}.$$
Zadanie 682 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2014

Przypominamy treść zadań:

673. Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o 2^{10}, jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

674. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają układ równań funkcyjnych
$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

673. Szukamy rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y równania
$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y^2 - 1024.$$
Przepisujemy lewą stronę jako $z^2 - 1$, gdzie $z = x^2 + 3x + 1$ (skoro $x \geqslant 1$, to $z \geqslant 5$) i rozwiązujemy równanie
$$y^2 - z^2 = 1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31.$$
Jego lewa strona to iloczyn $(y+z)(y-z)$, w którym pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też. Musi to być iloczyn jednej z czterech postaci: $1023 \cdot 1$, $341 \cdot 3$, $93 \cdot 11$, $33 \cdot 31$; dają one odpowiednio wartości $z = 511, 169, 41, 1$. Jedynie $z = 41$ jest wartością trójmianu $x^2 + 3x + 1$ dla naturalnego x, mianowicie $x = 5$. Otrzymujemy jedyne rozwiązanie zadania: $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 2^{10} = 52^2$.

674. Niech f będzie funkcją, spełniającą podane równania. Wykażemy, że jest to funkcja nieparzysta. Z drugiego równania widać, że $f(-x)^2 = f(x)^2$. Tak więc $f(-x) = \pm f(x)$. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby x_0 zachodzi równość $f(-x_0) = f(x_0) =: y_0$. Wystarczy pokazać, że $y_0 = 0$. Otóż
$$y_0 + 1 = f(-x_0) + 1 = f(1 - x_0) = \pm f(x_0 - 1) = \pm(y_0 - 1)$$
(ostatnia równość wynika ze spostrzeżenia, że $f(x-1) = f(x) - 1$ dla wszystkich x). Stąd $|y_0 + 1| = |y_0 - 1|$, co jest prawdą jedynie dla $y_0 = 0$. Zatem f jest funkcją nieparzystą.

Dla $x \geqslant 0$ mamy $f(x) = f(\sqrt{x}\,)^2 \geqslant 0$. Wobec nieparzystości, $f(x) \leqslant 0$ dla $x \leqslant 0$. Dla $x \leqslant 1$ dostajemy oszacowanie $f(x) = f(x-1) + 1 \leqslant 1$. To znaczy, że funkcja f odwzorowuje przedział $\langle 0; 1\rangle$ w siebie. Z równania $f(x+1) = f(x) + 1$ wynika teraz, że funkcja f odwzorowuje każdy przedział postaci $\langle k; k{+}1\rangle$ w siebie ($k \in \mathbb{Z}$). Zachodzi więc nierówność
$$|f(x) - x| \leqslant 1 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$
Weźmy dowolną liczbę $u > 1$ i oznaczmy $f(u) = v$. Z równania $f(x^2) = f(x)^2$ dostajemy $f(u^{2^n}) = v^{2^n}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Stąd $|v^{2^n} - u^{2^n}| \leqslant 1$, czyli
$$\left|\left(\frac{v}{u}\right)^{2^n} - 1\right| \leqslant \left(\frac{1}{u}\right)^{2^n},$$
co w granicy (przy $n \to \infty$) daje równość $v = u$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $f(x) = x$ dla $x > 1$.

Dzięki równości $f(x-1) = f(x) - 1$ wnosimy stąd, że
$$f(x) = x \qquad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$
Funkcja identycznościowa spełnia oba równania układu i jest jego jedynym rozwiązaniem.