Rekordy długowieczności i procesy Poissona

*Wojciech NIEMIRO**

Część I: Jak często umiera najstarszy człowiek na Ziemi?

Jaka jest szansa, że będę kiedyś najstarszym człowiekiem na świecie? W Polsce?

Oczywiście, na tak postawione pytanie matematyka nie udzieli odpowiedzi. Zbyt wiele czynników ma na to wpływ. Są wśród nich czynniki trudne do zmierzenia: w jakich jednostkach wyrazilibyśmy, powiedzmy, swój stan zdrowia lub łaskę bogów (przecież wybrańcy bogów umierają młodo)? Można jednak rozważyć bardzo uproszczony model, w którym postawione na wstępie pytanie nabierze matematycznego sensu. Wyobraźmy sobie świat sprawiedliwy, w którym każdy człowiek w momencie urodzenia ma jednakowe prawdopodobieństwo $S(t)$ przeżycia ponad t lat. Nazwiemy S *funkcją przeżycia*. Z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że $S(0) = 1$ i $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. Nie przesądzajmy, czy maksymalny możliwy czas życia jest skończony, czyli czy istnieje takie $t_{\max}$, że $S(t_{\max}) = 0$. To się okaże nieistotne w naszych rozważaniach. Nasze wyjściowe założenia możemy sformułować w następujący sposób:

T1. *Każdy noworodek ma jednakową funkcję przeżycia S.*

T2. *Długości życia różnych noworodków są statystycznie niezależne.*

Co znaczy założenie T2? Jeśli rozważymy dwóch osobników, to prawdopodobieństwo tego, że pierwszy przeżyje ponad t_1 lat i drugi t_2 lat, jest równe $S(t_1)S(t_2)$ dla dowolnej pary liczb nieujemnych t_1 i t_2. Podobnie prawdopodobieństwa się „przemnażają" dla trzech i więcej osobników.

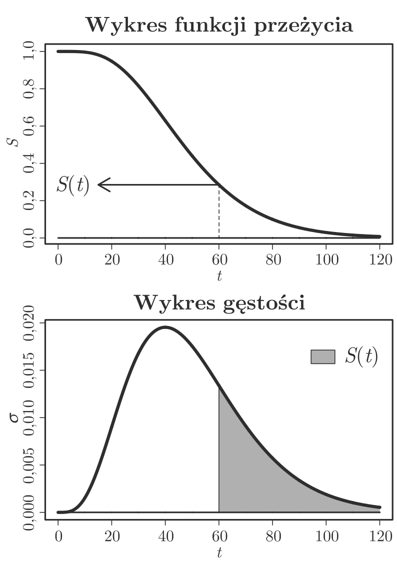
Potrzebny nam będzie jeszcze opis funkcji przeżycia $S(t)$ za pomocą tak zwanej *gęstości prawdopodobieństwa*. Zdarzenie polegające na tym, że długość życia pojedynczego osobnika należy do „krótkiego odcinka czasu" $(t, t+h]$ ma prawdopodobieństwo $S(t) - S(t+h)$. Niech

$$\sigma(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(S(t) - S(t+h)\right).$$

Nieformalnie znaczy to, że $S(t) - S(t+h) \approx h\sigma(t)$. Żeby wyrazić funkcję S poprzez funkcję σ, podzielmy przedział (t, ∞) na krótkie odcinki długości h. Mamy

$$S(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(S(t+ih) - S(t+(i+1)h)\right) \approx \sum_{i=0}^{\infty} h\sigma(t+ih) \approx \int_t^{\infty} \sigma(u)\mathrm{d}u.$$

Przechodząc do granicy z $h \to 0$, otrzymamy dokładną równość (patrz rysunek 1).



Rys. 1. Całka oznacza pole obszaru pod wykresem funkcji σ, zaznaczonego na dolnej części rysunku. Górna część rysunku jest wykresem funkcji S.

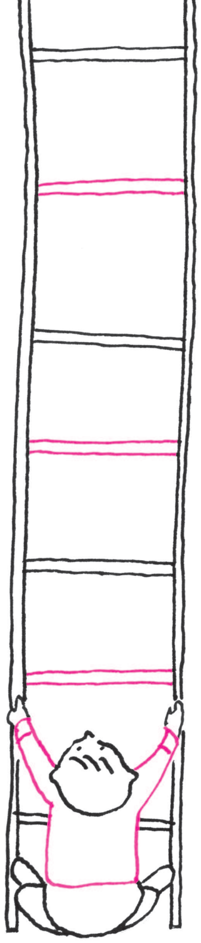
Druga grupa założeń mówi z grubsza tyle, że dzieci przychodzą na świat całkowicie losowo i z jednakową intensywnością. W języku rachunku prawdopodobieństwa „strumień narodzin" stanowi *jednorodny proces Poissona*. Ten niezwykle ciekawy obiekt matematyczny opiszemy poprzez następujące założenia:

N1. *Dla dowolnego momentu x prawdopodobieństwo urodzenia się dziecka w „krótkim" odcinku czasu $(x, x+h]$ jest w przybliżeniu równe λh, prawdopodobieństwo zaś urodzenia się więcej niż jednego dziecka jest tak małe, że możemy je zaniedbać.*

N2. *Liczby noworodków pojawiających się w rozłącznych odcinkach czasu są statystycznie niezależne.*

Zwróćmy uwagę, że mówimy teraz o „czasie kalendarzowym", liczonym od pewnego umownego momentu 0. Wyjaśnimy te założenia nieco dokładniej.

*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń; Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Niech $p_n(x)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasowym długości x urodzi się dokładnie n dzieci. Założenie N1 mówi, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_1(h)=\lambda, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{n=2}^{\infty}p_n(h)=0.$$

Oczywiście, z tego wynika, że $\lim_{h\to 0} p_0(h)=1$. Ukryte w warunku N1 jest założenie, że liczba narodzin w określonym odcinku czasu zależy tylko od długości tego odcinka. W naszym szybko zmieniającym się rzeczywistym świecie oczywiście tak nie jest, ale rozważamy uproszczony model stacjonarny.

Zacznijmy od wyprowadzenia wzoru wyrażającego $p_0(u)$ dla dowolnego $u>0$. Podzielmy odcinek $(t, t+u]$ na sumę n krótkich odcinków $(t+ih, t+(i+1)h]$ o długości $h=u/n$. Dla każdego z tych odcinków prawdopodobieństwo nienarodzenia się dziecka jest w przybliżeniu równe $1-\lambda h = 1-\lambda u/n$, z założenia N1. Z założenia N2 wynika, że

$$p_0(u)\approx\left(1-\frac{\lambda u}{n}\right)^n\approx\left(\exp\left(-\frac{\lambda u}{n}\right)\right)^n=\exp(-\lambda u).$$

Funkcja „exp" w tym wzorze jest to funkcja wykładnicza, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$, gdzie podstawa potęgi $\mathrm{e}=2{,}71828\ldots$ jest tak wybrana, żeby $\lim_{h\to 0}(\mathrm{e}^h-1)/h=1$. Nieformalnie mówiąc, $\exp(h)\approx 1+h$ dla h „bliskiego zeru". Tę własność wykorzystaliśmy w wyprowadzeniu wzoru na p_0. Wykorzystaliśmy także dobrze znaną własność przysługującą każdej funkcji wykładniczej, mianowicie $\mathrm{e}^{u+w}=\mathrm{e}^u\mathrm{e}^w$.

Stwierdzenie 1. *Prawdopodobieństwo tego, że w odcinku czasu $(t, t+u]$ nie urodzi się ani jedno dziecko, jest dane wzorem: $p_0(u)=\exp(-\lambda u)$.*

Sam ten wynik nie będzie bezpośrednio używany, ale dalsze rozumowania (w nieco bardziej skomplikowanej sytuacji) będą podobne.

Przyjmijmy jeszcze jedno założenie.

TN. *Długości życia wszystkich osobników są statystycznie niezależne od procesu narodzin.*

Spostrzeżenie, które pozwoli nam na rozwiązanie postawionego zadania, jest niezwykle proste.

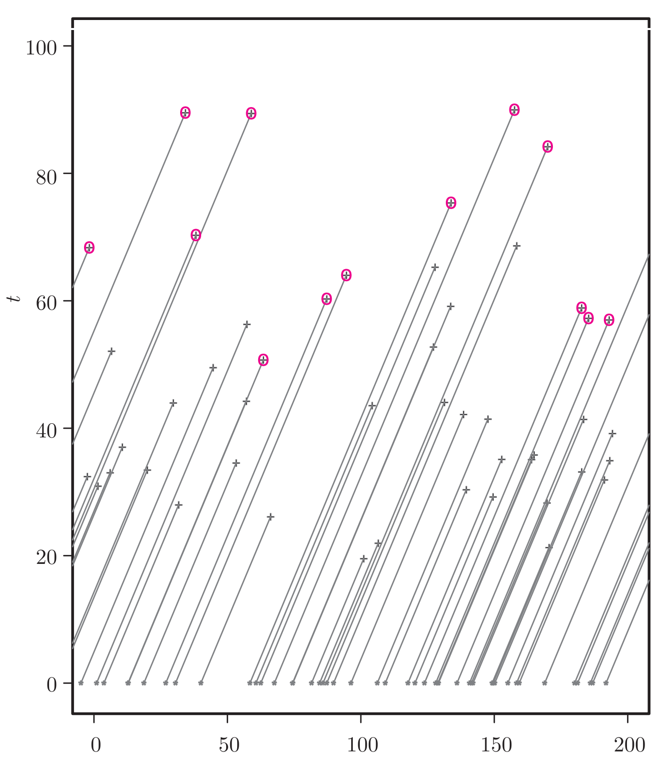
Stwierdzenie 2. *Zdarzenie polegające na tym, że w „krótkim" odcinku czasu $(x, x+h]$ narodzi się osobnik, który przeżyje ponad t lat, jest w przybliżeniu równe $\lambda h S(t)$.*

Nasz główny rezultat możemy sformułować w następującej postaci.

Twierdzenie. *Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że pojedynczy osobnik w momencie śmierci będzie starszy od wszystkich aktualnie żyjących, jest równe*

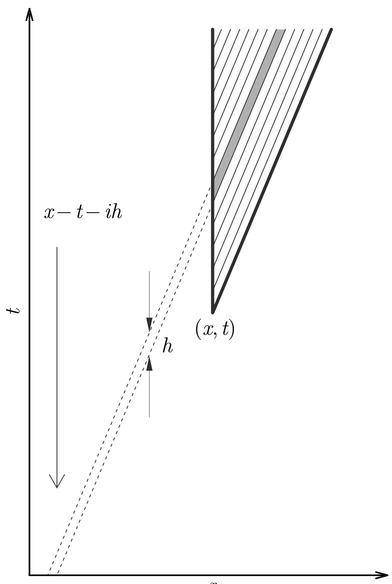
$$\int_0^\infty \sigma(t)\exp\left(-\lambda\int_t^\infty S(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

Zanim podamy dowód, zaproponujemy pewną geometryczną interpretację badanego procesu. Rozważmy układ współrzędnych na płaszczyźnie. Oś poziomą oznaczymy literką x i będziemy na niej zaznaczali czas „kalendarzowy". Oś pionowa, oznaczona t, „mierzy" czas życia. Życie osobnika, który urodził się w momencie x i przeżył t lat, przedstawimy w postaci odcinka o końcach $(x, 0)$ i $(x+t, t)$.



Rys. 2. Symulowany przebieg procesu; kolorowe kółka oznaczają rekordy długowieczności.

Na rysunku 2 widzimy przykładową realizację opisywanego przez nas procesu.



Rys. 3. Obszar $\mathcal{D}$ podzielony na paski.

Punkty na osi x (czyli momenty narodzin) stanowią, jako się rzekło, jednorodny proces Poissona. Proces na naszym rysunku ma intensywność $\lambda = 0{,}2$, co oznacza, że średnio na jednostkę czasu (powiedzmy, rok) przypada 0,2 narodzin. Współrzędne pionowe punktów stanowią, w języku statystyki matematycznej, *próbkę z rozkładu prawdopodobieństwa* długości życia, opisanego funkcją $S(t)$. W naszym przykładzie jest to funkcja przedstawiona na rysunku 1.

Sformułujemy następujący wynik pomocniczy.

Lemat. *Jeśli pewien osobnik umrze w wieku t lat, to prawdopodobieństwo tego, że w momencie śmierci będzie starszy od wszystkich aktualnie żyjących, jest równe*

$$\exp\Big(-\lambda\int\limits_t^\infty S(u)\mathrm{d}u\Big).$$

Dowód. Najpierw opiszmy interesujące nas zdarzenie losowe geometrycznie. Śmierć osobnika, o którym mowa, jest reprezentowana przez punkt (x,t). W chwili x ten osobnik jest najstarszy ze wszystkich wtedy i tylko wtedy, gdy nie zdarzy się śmierć opisana takim punktem (x',t'), że $x' > x$ i $t' > t + (x'-x)$. Innymi słowy, mamy obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w obszarze $\mathcal{D}$, zaznaczonym na rysunku 3, nie ma „punktów śmierci”.

Podzielmy obszar $\mathcal{D}$ na „wąskie paski” wysokości h, tak jak pokazano na rysunku 3. Powiemy, że podstawy pasków są to (pionowe) odcinki pomiędzy punktami $(x,t),(x,t+h),\ldots,(x,t+ih),(x,t+(i+1)h),\ldots$. Zajmiemy się bliżej „typowym paskiem” numer i o podstawie $(x,t+ih),(x,t+(i+1)h)$. Zgodnie ze Stwierdzeniem 2 w tym pasku z prawdopodobieństwem bliskim $\lambda hS(t+ih)$ leży jeden „punkt śmierci”. Prawdopodobieństwo tego, że w tym pasku leżą dwa punkty lub więcej jest tak małe, że możemy je zaniedbać. Stąd wynika, że prawdopodobieństwo *braku punktów* w pasku rozsądnie przybliża liczba $1-\lambda hS(t+ih)$. Rzecz jasna, brakuje punktów w całym obszarze $\mathcal{D}$, gdy w każdym pasku brak punktów. Z Założeń T2, N2 i TN wnioskujemy, że obliczane przez nas prawdopodobieństwo jest iloczynem odpowiednich prawdopodobieństw dla pasków, a więc w przybliżeniu

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-\lambda hS(t+ih)) \approx \prod_{i=0}^{\infty}\exp\left(-\lambda hS(t+ih)\right) = \exp\Big(-\lambda\sum_{i=0}^{\infty}hS(t+ih)\Big) \approx$$
$$\approx \exp\Big(-\lambda\int\limits_0^\infty S(t+u)\mathrm{d}u\Big).$$

To jest wyrażenie, które chcieliśmy otrzymać. Wykorzystaliśmy pewne przybliżone równości, które stają się coraz dokładniejsze, jeśli h maleje do zera. Przyjmijmy, z przymrużeniem oka, że „wykazaliśmy słuszność lematu”.

W Lemacie pojawiła się funkcja, którą odtąd będziemy oznaczać

$$R(t) = \int\limits_t^\infty S(u)\mathrm{d}u.$$

Dowód Twierdzenia. Najtrudniejsze już mamy za sobą. Wystarczy teraz zsumować prawdopodobieństwa zdarzeń polegających na tym, że rozpatrywana osoba umarła w przedziale wieku $(ih,(i+1)h]$ i była w momencie śmierci starsza od wszystkich innych. Korzystając z Lematu, otrzymujemy

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(S(ih)-S((i+1)h)\right)\exp\left(-\lambda R(ih)\right) \approx \sum_{i=0}^{\infty}h\sigma(ih)\exp\left(-\lambda R(ih)\right) \approx$$
$$\approx \int\limits_0^\infty \sigma(t)\exp\left(-\lambda R(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Przejście do granicy z $h\to 0$ zmienia przybliżenia w dokładne równości i kończy dowód twierdzenia.

Dygresje i komentarze za miesiąc.

Rozwiązanie zadania M 1419.
Odp. Tak!

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Ustalmy trzy wektory jednostkowe v_1, v_2, v_3 i załóżmy, że dla każdego zestawu znaków $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ zachodzi

$$|\epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 + \epsilon_3 v_3|^2 < 3.$$

Ponieważ $|x|^2 = x\cdot x$, gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny, dostajemy

$$\sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j v_i v_j < 3,$$

co przy założeniu o tym, że wektory v_i mają długość jeden, daje

$$\sum_{i\neq j}\epsilon_i\epsilon_j v_i v_j < 0,$$

Sumując otrzymane nierówności stronami po wszystkich zestawach znaków $\epsilon = (\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$, dostajemy

$$0 > \sum_{\epsilon}\sum_{i\neq j}\epsilon_i\epsilon_j v_i v_j = \sum_{i\neq j}(v_i\cdot v_j)\Big(\sum_{\epsilon}\epsilon_i\epsilon_j\Big).$$

Ponieważ $\sum_\epsilon \epsilon_i\epsilon_j = 0$ dla $i\neq j$, więc otrzymujemy sprzeczność.