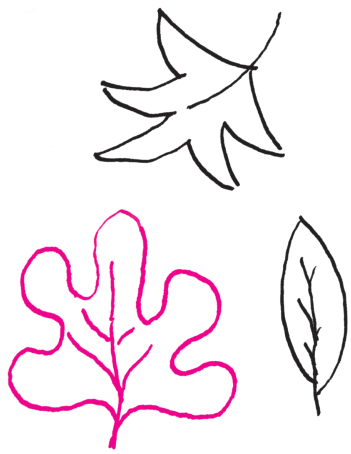
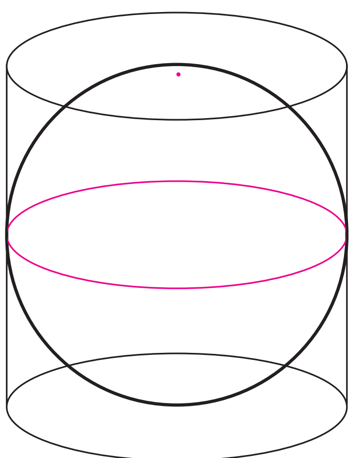


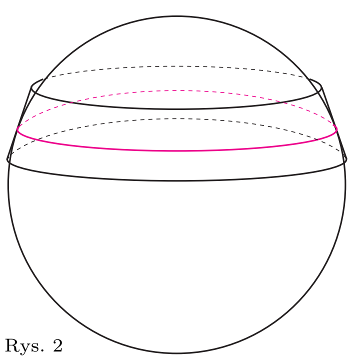
rozwiązać problemu zapytań *rank*, używając tylko jednego rozmiaru bloków – powiedzmy, $\frac{1}{2}\log n$?

Citius, altius, fortius. W tym artykule opisaliśmy bardzo oszczędne reprezentacje drzew binarnych i dowolnych pozwalające efektywnie realizować podstawowe operacje związane z nawigacją po drzewie. Za pomocą bardziej zaawansowanych narzędzi zaprojektowano inne bardzo oszczędne reprezentacje drzew (bazujące na wyrażeniach nawiasowych równoważnych drzewom), które pozwalają wykonywać całe mnóstwo operacji: wyznaczanie rozmiarów poddrzew, wysokości i głębokości węzłów, znajdowanie najniższych wspólnych przodków (LCA) par węzłów i przodków węzłów na określonej głębokości, zliczanie liści w poddrzewach itd. Co więcej, z podanych tutaj pomysłów rozwinęła się cała dziedzina badań zajmująca się bardzo oszczędnymi strukturami danych. Więcej informacji na ten temat Czytelnik znajdzie w Internecie pod hasłem *succinct data structures*.

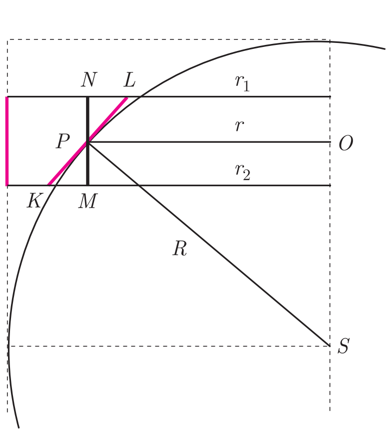
Piłka w puszce



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Piłki tenisowe na ogół pakowane są w rurkę po kilka sztuk. Wyobraźmy sobie piłki tak cenne, że pakowane są każda oddzielnie. Takie opakowanie to z matematycznego punktu widzenia walec. Piłka styka się z jego powierzchnią boczną wzdłuż okręgu, a przekrój osiowy tego walca jest kwadratem (rys. 1). Okazuje się, że tak zapuszkowana piłka ma powierzchnię równą powierzchni bocznej swojej puszki, czyli

powierzchnia sfery jest równa powierzchni bocznej opisanego na niej walca.

Jeszcze ciekawszy od samego faktu jest jego starożytny dowód, pochodzący od Archimedesa. Zapoczątkował on bardzo popularny w matematycznej praktyce obyczaj, że gdy chcemy coś udowodnić, to dowodzimy czegoś zupełnie innego.

W tym przypadku udowodnimy, że jeśli wytniemy z piłki (czyli sfery) plasterek płaszczyznami równoległymi do denek puszki (czyli podstaw walca) i w połowie jego wysokości opiszemy na nim płaską obręcz (czyli stożek ścięty, rys. 2), to jej powierzchnia będzie taka sama, jak powierzchnia wyciętego przez te płaszczyzny fragmentu puszki (czyli powierzchnia boczna walca, tylko tym razem niskiego). Nie narysowałem go, bo nic nie byłoby wtedy widać.

Ale gdy narysujemy przekrój opisanej sytuacji płaszczyzną przechodzącą przez środek piłki i prostopadłą do denek puszki, to wszystko stanie się widoczne (rys. 3). Kolorowe kreski to fragment puszki (oznaczmy jego wysokość przez h) i fragment obręczy ($KL =: l$). Narysujmy przez punkt P styczności obręczy i piłki odcinek MN – przesunięty fragment puszki oraz odcinek PS łączący P ze środkiem piłki i odcinek PO, gdzie O jest rzutem prostokątnym P na oś symetrii puszki.

Ponieważ $PL \perp PS$ i $PN \perp PO$, więc trójkąty PLN i PSO są podobne, co daje

$$\frac{\frac{h}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{PN}{PL} = \frac{PO}{PS} = \frac{r}{R}, \text{ czyli } hR = lr, \text{ zatem } 2\pi hR = 2\pi lr = \pi l(r_1 + r_2).$$

Znane wzory na pole powierzchni bocznej walca i stożka ściętego przekonują nas, że dowiedliśmy tego, co chcieliśmy, ale jak to się ma do wyróżnionej kolorem prawidłowości?

Zauważmy, że gdy podzielimy piłkę i puszkę na plasterki, to suma pól obręczy opisanych na plasterkach złoży się na całą powierzchnię boczną puszki, czyli $2\pi \cdot 2R \cdot R = 4\pi R^2$. Dalej Archimedes pisze tak: gdy będziemy rozpatrywali coraz węższe plasterki, to otrzymywane obręcze będą w sumie coraz podobniejsze do powierzchni piłki, aż w końcu (my mówimy: w granicy) będą z tą powierzchnią identyczne. A ponieważ dla każdego podziału suma powierzchni obręczy będzie równa powierzchni bocznej puszki, więc tak będzie i na końcu.

Czy zgodzilibyśmy się na takie rozumowanie?

M.K.