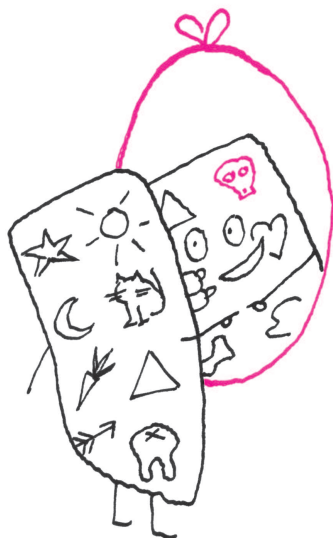


# Naprawdę ciekawa gra

Mariusz SKAŁBA\*

## Jak to jest zrobione?

Mówi się, że gry (mniej lub bardziej) towarzyskie bywają interesujące i że wpływają pozytywnie na rozwój intelektualny gracza. To drugie jest całkowicie bezdyskusyjne i dodam optymistycznie, że rozwijać można się w każdym wieku. Moje duże wątpliwości budzi natomiast atrybut *interesujące*, który chyba zbyt pochopnie przypisuje się wielu grom. Osobiście nie potrafię zachwycić się przebiegiem rozgrywek nawet tak szacownych gier, jak szachy czy brydż, ale, jak wiadomo, o gustach się nie dyskutuje.



Cóż zatem ciekawego może być w grze towarzyskiej jako takiej? Według mnie wyłącznie matematyka, która kryje się za jej zasadami (a niekoniecznie za jej rozgrywką!). Oto dość świeży przykład takiej gry – żeby nie uprawiać kryptoreklamy, nazwijmy ją roboczo grą  $X$ . Talia składa się z 55 kart. Na każdej z nich jest 8 różnych obrazków typu: słoneczko, kot, marchewka itp. ... I teraz rzecz najważniejsza! Dowolne dwie karty mają dokładnie jeden obrazek wspólny. W instrukcji zaproponowano kilka prostych gier z użyciem takiej talii. Najprostsza polega na tym, że dwóch graczy, z których każdy otrzymał początkowo 27 kart, wyklada w każdym ruchu jedną kartę na stół (jedna karta nie bierze udziału w grze). Ten, który jako pierwszy spostrzeże i nazwie wspólny obrazek, wygrywa ruch i pozbywa się tej karty. Wygrywa ten, który wcześniej pozbędzie się wszystkich kart. W przypadku większej liczby graczy możliwe są dość oczywiste warianty, które czynią grę jeszcze ciekawszą (?).

Ale my nie chcemy tutaj zajmować się rozgrywką, lecz zadajemy pytanie podstawowe: jak zaprojektować karty, aby spełniony był warunek, że każde dwie mają dokładnie jeden wspólny obrazek? O tym traktuje ten artykuł. Uważny Czytelnik od razu zauważy, że na tak sformułowane pytanie odpowiedź jest trywialna: na każdej z 55 kart należy umieścić słoneczko, a pozostałe 7 miejsc obsadzić  $55 \cdot 7 = 385$  różnymi przedmiotami! Jednak chodzi nam o coś więcej: pobieżna inspekcja talii kart przekonuje nas, że różnych obrazków jest około 50, a nie ponad 350! Po dłuższej grze zauważamy ponadto, że wspólne obrazki z całego katalogu obrazków pojawiają się mniej więcej równomiernie (np. słoneczko podobnie często jak marchewka!). To wszystko *rozgrywało* się na polu namiotowym w Polańczyku, nad pięknym Jeziorem Solińskim. Moich kompanów wypoczynku (wyłącznie niematematyków!) zachwyciło właśnie to: bezkompromisowe przestrzeganie reguły w nietrywialny sposób! Zapytali mnie wprost: **Jak to jest zrobione?** Poszli pływać na deskach, a ja znowu miałem pretekst, żeby zostać w bazie windsurfingowej Malibu.

Szukałem podobnych sytuacji w różnych działach matematyki i dość szybko ustaliłem, że „dwie różne proste przecinają się **na ogół** w dokładnie jednym punkcie”. U nas „proste” będą kartami, a „punkty” będą obrazkami. Odważnie brnąłem dalej, ufając klasykom, którzy w roli „punktów” widzieli nawet krzesła, byle spełniały aksjomaty! Póki co przeszkadzało mi bardzo wytłuszczone zastrzeżenie **na ogół**, które dopuszcza, że są na świecie proste równoległe. Ale my nie chcemy dopuszczać żadnych wyjątków! Każde dwie różne „proste” powinny przecinać się w dokładnie jednym „punkcie”. Czy są takie dziwne geometrie? Są i to pod ręką!

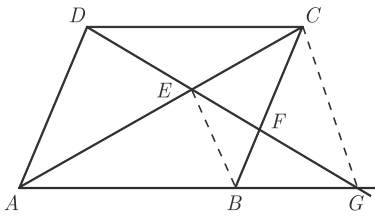
Każdy Czytelnik *Delty* słyszał zapewne o płaszczyźnie rzutowej, ale dla porządku przypomnijmy jej konstrukcję. Niech  $\mathbb{F}$  będzie dowolnym ciałem. Oznaczmy najpierw zbiór trójek elementów  $(x_1, x_2, x_3)$ , gdzie  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}$  przez  $\mathbb{F}^3$  i wprowadźmy w  $\mathbb{F}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  następującą relację  $R$ . Piszemy  $(x_1, x_2, x_3)R(y_1, y_2, y_3)$  wówczas, gdy istnieje  $a \in \mathbb{F}$ ,  $a \neq 0$ , takie, że  $(x_1, x_2, x_3) = a(y_1, y_2, y_3)$ . Łatwo sprawdzić, że  $R$  jest relacją równoważności na

Patrz np.: M. Donten-Bury, *Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?*, Delta 6/2011, M. Kordos, *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Delta 5/2013.

\*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



### Rozwiązanie zadania M 1417.



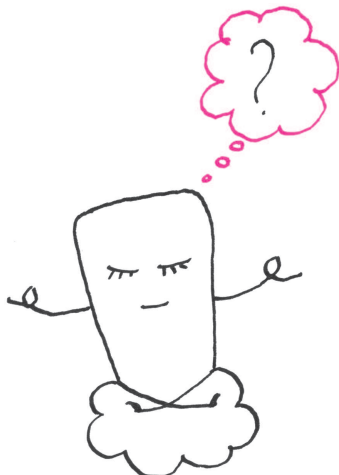
Skoro trójkąty  $BGF$  i  $CFE$  mają równe pola, to także trójkąty  $BGE$  i  $CBE$  mają równe pola, więc ich wysokości opuszczone na wspólną podstawę  $BE$  są równej długości, a stąd  $BE \parallel CG$ . Niech  $x$  oznacza szukany stosunek. Z twierdzenia Talesa dostajemy kolejno

$$x = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BG} = \frac{DC}{CG} = \frac{FC}{CF} = \frac{CG}{BE} = \frac{AC}{AE} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Zatem  $x^2 = x + 1$ , skąd  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .



Więcej o zastosowaniu geometrii skończonych w projektowaniu konfiguracji kombinatorycznych (i nie tylko!) znajdzie Czytelnik w pięknej książce: W. Lipski, W. Marek, *Analiza kombinatoryczna*, PWN, Warszawa 1986.



zbiorze  $\mathbb{F}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Określamy teraz płaszczyznę rzutową nad ciałem  $\mathbb{F}$  jako zbiór  $(\mathbb{F}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})/R$  klas abstrakcji relacji  $R$  i oznaczamy go tradycyjnie symbolem  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ .

Jeśli, na przykład,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , to możemy rozpatrywać punkt  $P = [(1, 2, 3)]$ . Biorąc  $a = 5$ , możemy ten sam punkt  $P$  zapisać inaczej:  $P = [(5, 10, 15)]$ . Określmy jeszcze proste w naszej geometrii. Jeśli  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , to określamy prostą  $\mathcal{L}_{a,b,c}$  jako zbiór punktów  $P = [(x, y, z)]$  spełniających równanie

$$ax + by + cz = 0.$$

Proszę zauważyć, że tak określona przynależność punktu  $P$  do prostej nie zależy od wyboru przedstawiciela  $(x, y, z)$  z klasy abstrakcji. Jeśli rozpatrzmy teraz dwie różne proste  $\mathcal{L}_{a_1,b_1,c_1}$  oraz  $\mathcal{L}_{a_2,b_2,c_2}$ , co oznacza, że nie istnieje  $a \in \mathbb{F}$  takie, iż  $(a_1, b_1, c_1) = a(a_2, b_2, c_2)$ , to wówczas będzie

$$(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1) \neq (0, 0, 0).$$

Natychmiast sprawdzamy bezpośrednim rachunkiem, że

$$P = [(b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1)] \in \mathcal{L}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathcal{L}_{a_2,b_2,c_2}.$$

Mamy więc to, czego chcieliśmy: każde dwie różne proste przecinają się w jednym punkcie (i tylko w jednym, co łatwo sprawdzić)! Do rozwiązania pozostał jeszcze jeden problem: na prostej w  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  jest nieskończenie wiele punktów, a na karcie gry  $X$  ma być zaledwie 8 obrazków. Ale dla matematyka to żaden problem: ciało  $\mathbb{R}$  jest po prostu zbyt duże, zamiast  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  należy użyć ciała skończonego  $\mathbb{F}_7$ .

Składa się ono z wszystkich reszt modulo 7, a zatem  $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Działania też są określone modulo 7, np.:  $3 + 6 = 2$ ;  $3 \cdot 4 = 5$ ;  $-1 = 6$ ;  $1/4 = 2$  itp. Przekonajmy się, że na każdej prostej  $\mathcal{L}_{a,b,c}$  leży dokładnie 8 punktów. Załóżmy,

że np.  $c \neq 0$ . Z równania prostej obliczamy  $z = \left(\frac{-a}{c}\right)x + \left(\frac{-b}{c}\right)y$ . Mamy teraz

ogromną swobodę. Za  $x$  i  $y$  możemy podstawiać niezależnie wszystkie elementy ciała  $\mathbb{F}_7$ , omijając tylko parę  $(x, y) = (0, 0)$  (dlaczego?). Razem z wynikowym  $z$ , obliczonym z powyższego wzoru, otrzymamy wówczas  $7^2 - 1 = 48$  trójek, których klasy abstrakcji wyczerpują całą prostą – każdy punkt na prostej otrzymamy jednak sześciokrotnie, a zatem  $|\mathcal{L}_{a,b,c}| = 48/6 = 8$ . Podobnie obliczamy, że

$|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)| = \frac{7^3 - 1}{7 - 1} = 49 + 7 + 1 = 57$ . A ile jest prostych w naszej geometrii? Z powyższego opisu wynika, że również 57. Każdy bowiem punkt  $[(a, b, c)]$

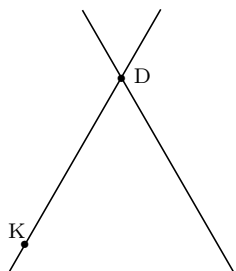
wyznacza prostą  $ax + by + cz = 0$  i odwrotnie – zjawisko to nazywamy dualnością i odgrywa ono ważną rolę w geometrii rzutowej. Coś tu się jednak nie zgadza, gdyż talia składa się z 55 kart – no dobrze, nie użyto po prostu pewnych dwóch prostych – zapewne z powodów eko-logicznych. Może przynajmniej zgadza się liczba różnych obrazków (czyli punktów) użytych przez projektanta gry  $X$ ?

Zniknęli za horyzontem i szybko nie wrócą... , a więc do roboty: „kotek, marchewka, słoneczko... znowu słoneczko – już było, więc nie liczymy powtórnie... diabełek.” „Jeden, dwa, trzy, ..., pięćdziesiąt siedem.” – dzięki Ci Boże za te piękne wzgórza, jezioro i płaszczyznę rzutową  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$ !

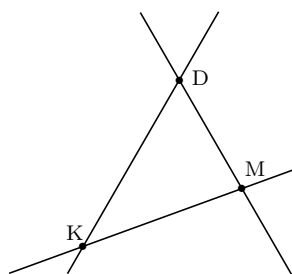
### Brakujące karty

Jeśli gra  $X$  jest rozrywkowym wcieleniem absoulutu  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$ , to medytacjom z użyciem talii kart przeszkadza niewątpliwie jej niezupełność – brak dwóch kart. Matematyk nie może przejść nad tym do porządku dziennego – już woli nawet nie grać, niż przestać myśleć o dwóch brakujących kartach. Już słyszę te złośliwości pod naszym adresem: „Lubujecie się w rozmyślaniach nad tym, czego nie ma”. Na szczęście pogłębiona opinia o działalności matematyków zawiera stwierdzenie: „Oni rachują”. A więc do roboty!

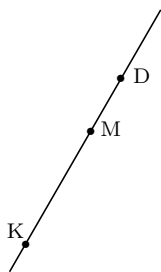
Policzę najpierw, na ilu kartach występuje słoneczko: wyszło, że na 8. Tak więc cały pęk prostych przechodzących przez słoneczko jest nienaruszony. Podobnie piesek występuje na 8 kartach, ale gorszy los spotkał kotka  $K$  – podobnie jak 13 innych przedmiotów występuje na 7 kartach. Diabełek  $D$  jest niepokieszony,



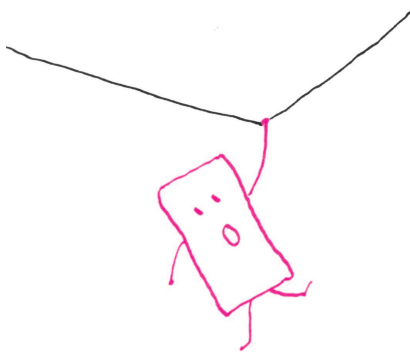
Rys. 1. Brakujące proste.



Rys. 2. Prosta KM jest w tali.



Rys. 3. M leży na prostej DK.



**Rozwiązanie zadania F 854.**

Średnia masa molowa powietrza to  $0,21 \cdot 32 \text{ g} + 0,79 \cdot 28 \text{ g} \approx 28,8 \text{ g}$ . Różnica mas molowych tlenu i azotu wynosi  $32 \text{ g} - 28 \text{ g} = 4 \text{ g}$ . Molowa gęstość gazu o masie molowej  $\mu$  maleje z wysokością  $H$  jak  $e^{-\frac{\mu g H}{RT}}$ , gdzie  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$  jest stałą gazową,  $g$  przyspieszeniem ziemskim, a  $T$  temperaturą bezwzględną. Stosunek gęstości tlenu i azotu maleje na wysokości 830 m od  $21/79 = 0,26058$  do

$$\frac{21}{79} \cdot 0,91^{4/28,8} \approx 0,2624,$$

a więc zawartość tlenu maleje z 21% do 20,78%.

choć wyróżniony: tylko on występuje na 6 kartach. Rysunek 1 ilustruje powyższy opis werbalny. „Prosta” DK (przechodząca przez diabełka i kotka) jest, oczywiście, jedną z brakujących prostych. Rozważmy teraz jeden z 13 pozostałych przedmiotów, oprócz K, leżących na 7 prostych – niech to będzie marchewka M. Mamy rozstrzygnąć problem: czy M leży na prostej DK, czy też na drugiej brakującej?

W tym celu należy wyjąć z tali wszystkie 7 kart „przechodzących” przez kotka K. Jeśli jest wśród nich karta zawierająca marchewkę M, to M leży na drugiej brakującej prostej. Jeśli natomiast żadna z tych kart nie przechodzi przez M, to M leży na prostej DK; inaczej mówiąc, diabełek, kotek i marchewka są współliniowe! Obie te sytuacje przedstawiono odpowiednio na rysunkach 2 i 3. Tak samo sadowimy pozostałe przedmioty leżące na 7 prostych.

Proszę zauważyć, że rozwiązanie problemu brakujących prostych nie wymagało użycia współrzędnych, tzn. nie pracowaliśmy z równaniami w  $\mathbb{F}_7$  jak w poprzedniej części artykułu. Korzystaliśmy wyłącznie z własności „geometrycznych” typu: każda prosta zawiera 8 punktów, każdy punkt leży na 8 prostych itp. Te własności i wiele innych można wywieść z następujących aksjomatów abstrakcyjnej planimetrii rzutowej:

- A1.** Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.
- A2.** Każde dwie różne proste przechodzą przez dokładnie jeden wspólny punkt.
- A3.** Istnieją cztery różne punkty, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Wychodząc z tych aksjomatów, można, na przykład, wykazać, że jeśli cała płaszczyzna składa się ze skończonej liczby punktów, to ta skończona liczba musi być postaci  $m^2 + m + 1$  oraz

- na każdej prostej leży  $m + 1$  punktów,
- przez każdy punkt przechodzi  $m + 1$  prostych,
- wszystkich prostych jest też  $m^2 + m + 1$ .

Liczbę  $m$  nazywamy *rzędem* skończonej płaszczyzny rzutowej. Płaszczyzna  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_7)$  ma rząd  $m = 7$ . Jakie liczby naturalne  $m$  są rządami skończonych płaszczyzn rzutowych? Jeżeli  $m = p$  jest liczbą pierwszą, to uogólniając przedstawioną wyżej konstrukcję (używając ciała reszt  $\mathbb{F}_p$  zamiast szczególnego ciała reszt  $\mathbb{F}_7$ ), otrzymujemy płaszczyznę rzutową rzędu  $p$ . Tego typu konstrukcja wychodzi z ciała  $\mathbb{F}$  i produkuje płaszczyznę  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F})$ . Okazuje się, że  $\mathbb{F}_p$  nie są jedynymi ciałami skończonymi. Pełny opis sytuacji zawiera się w klasycznym twierdzeniu, że dla każdej liczby pierwszej  $p$  i każdej liczby naturalnej  $k$  istnieje dokładnie jedno ciało o liczbie elementów  $p^k$ ; oznaczamy je przez  $\mathbb{F}_{p^k}$ . Zobaczmy dla przykładu, jak powstaje ciało  $\mathbb{F}_9$ . Niech  $\mathbb{F}_9$  jako zbiór składa się z napisów postaci  $a + bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{F}_3$ , natomiast  $i$  jest osobnym przedmiotem. Określmy działania w  $\mathbb{F}_9$ . Dodawanie i odejmowanie wykonujemy „po współrzędnych”:

$$(a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \quad (a + bi) \ominus (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

I tak, na przykład,

$$(1 + 2i) \oplus (1 + 1i) = 2 + 0i, \quad (1 + 2i) \ominus (1 + 1i) = 0 + 1i, \quad \ominus(1 + 2i) = 2 + 1i$$

i tak dalej.

Mnożenie  $\odot$  jest ciekawsze (choć nie dla Czytelnika, który zna liczby zespolone):

$$(a + bi) \odot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Można sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób ciało, tzn. spełnione są wszystkie naturalne własności dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia znane z arytmetyki liczb rzeczywistych. Czytelnik może się zastanowić, jak znajdować elementy odwrotne do elementów różnych od  $0 + 0i$ . My zadowolimy się przykładem dzielenia:

$$(2 + 1i) \oslash (1 + 1i) = 0 + 1i, \text{ bo } (0 + 1i) \odot (1 + 1i) = 2 + 1i.$$



**Rozwiązanie zadania M 1418.**

Na początku zauważmy, że dla nieparzystej liczby  $x$  zachodzi  $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$ , ponieważ  $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$  oraz  $x-1$  lub  $x+1$  jest podzielne przez 4, a pozostałe czynniki są parzyste. Ponadto na mocy małego twierdzenia Fermata  $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$  dla  $x$  niepodzielnych przez 17. Zauważmy jeszcze, że

$$\begin{aligned} n^{n^{n^n}} - n^{n^n} &= n^{n^n} \left( n^{\left( n^{n^{n^n}} - n^n \right)} - 1 \right) = \\ &= n^{n^n} \left( n^{n^n (n^{n^n} - 1)} - 1 \right) = \\ &= n^{n^n} (n^{ab} - 1), \end{aligned}$$

gdzie  $a = n^n$  i  $b = n^{n^n - n} - 1$ .  
 Jeśli  $17|n$ , to teza jest oczywista. Niech więc  $17 \nmid n$ . Jeśli  $n$  jest parzyste, to  $n \geq 4$  i mamy  $16|n^n = a$ , więc  $n^{ab} \equiv 1 \pmod{17}$ .  
 Jeśli  $n$  jest nieparzyste, to  $n^n \equiv n \pmod{4}$ , więc możemy zapisać  $n^n - n = 4r$  i wówczas  $b = n^{n^n - n} - 1 \equiv n^{4r} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$ , skąd, jak poprzednio,  $n^{ab} \equiv 1 \pmod{17}$ , co daje tezę.

Tak więc  $\mathbb{F}_9$  składa się z  $3 \cdot 3 = 9$  elementów i jest ciałem – mamy więc płaszczyznę rzutową rzędu 9 i możemy zaprojektować odpowiednią grę z 10 obrazkami na każdej z (nawet)  $9^2 + 9 + 1 = 91$  kart. Grę „minimalną” otrzymamy, wychodząc z płaszczyzny rzutowej  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$  – karty są trzyobrazkowe i jest ich 7. Słynna hipoteza mówi, że jedynie potęgi liczb pierwszych  $p^k$  są rządami skończonych płaszczyzn rzutowych.

Póki co najogólniejsze twierdzenie w tym kierunku udowodnili Bruck i Ryser (1949):

*Jeśli istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu  $m$  oraz  $m$  daje resztę 1 lub 2 w dzieleniu przez 4, to  $m$  jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.*

Wynika z tego natychmiast, że 6 nie jest rzędem płaszczyzny rzutowej – gry 7-obrazkowej nie da się skonstruować. Pierwsza liczba  $m$ , która nie podpada pod powyższe twierdzenie, to  $m = 10$  – używając dobrych pomysłów i bardzo mocnych komputerów (Lam, Thiel, Swiercz, 1989), wykazano, że nie ma płaszczyzny rzutowej rzędu 10. Nie wiadomo, czy istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu 12.

Wróćmy wreszcie do oryginalnej gry  $X$ . Zauważmy przede wszystkim, że jej projektanci nie musieli *a priori* korzystać z całej tej algebraicznej konstrukcji, która wychodzi od ciała  $\mathbb{F}_7$ . Może zrobili to „na piechotę” i mieli bardzo dużo szczęścia? To oczywiście możliwe, bo, jak wiadomo, szczęścia nigdy za dużo, ale można udowodnić, że płaszczyzny rzutowe rzędów  $m \leq 8$  muszą pochodzić od ciał skończonych – tak więc nawet jeśli twórcy gry nie korzystali ze współrzędnych w ciele  $\mathbb{F}_7$ , to faktycznie te współrzędne daje się wprowadzić i może być np. tak, że  $D = [(1, 1, 0)]$ . Natomiast oprócz dość dokładnie opisanej powyżej płaszczyzny  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_9)$  istnieją jeszcze trzy inne płaszczyzny rzutowe rzędu 9, w których nie da się wprowadzić współrzędnych z ciała  $\mathbb{F}_9$ , a nawet więcej: nie zachodzi w nich twierdzenie Desarguesa, ale to już historia na inną opowieść.

Na zakończenie przepis na zrobienie sobie talii kart opartej na  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

	Arbuz (1,1,2)	Beczka (1,1,1)	Cytryna (1,2,0)	Diabeł (1,1,0)	Foczka (1,2,2)	Gruszka (1,0,1)	Jabłko (1,0,0)	Kotek (0,0,1)	Lisek (1,2,1)	Marchew (0,1,2)	Piesek (0,1,1)	Słońce (0,1,0)	Trójkąt (1,0,2)
$x + y + 2z = 0$	•		•			•					•		
$x + y + z = 0$		•	•							•			•
$x + 2y = 0$	•	•		•				•					
$x + y = 0$			•		•			•	•				
$x + 2y + 2z = 0$				•	•	•				•			
$x + z = 0$	•				•							•	•
$x = 0$								•		•	•	•	
$z = 0$			•	•			•					•	
$x + 2y + z = 0$				•					•		•		•
$y + 2z = 0$		•			•		•				•		
$y + z = 0$	•						•		•	•			
$y = 0$						•	•	•					•
$x + 2z = 0$		•				•			•			•	

Talia pomniejszona, ale kompletna: Arbuz ma współrzędne jednorodne (1, 1, 2) oraz leży na prostych pierwszej, trzeciej, szóstej i jedenastej, gdyż liczby  $1 + 1 + 2 \cdot 2$ ,  $1 + 2 \cdot 1$ ,  $1 + 2$  dzielą się przez 3. Zarówno prostych, jak i punktów jest  $13 = 9 + 3 + 1$ . Na każdej prostej leżą  $4 = 3 + 1$  punkty, przez każdy z 13 punktów przechodzą 4 proste i wreszcie każde dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny – proszę sprawdzić! Oczywiście, możliwych czwórek obrazków jest dużo więcej (55 razy, ale to „inne” 55) niż tych, które będą na jednej karcie-prostej: już Arbuz, Beczka i Cytryna nie znajdują się równocześnie na żadnej karcie.

