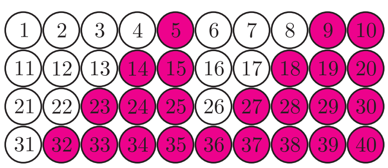
mała delta

Kraina dwóch monet

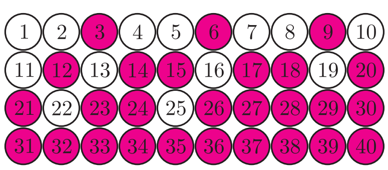
Wyobraźmy sobie, że trafiliśmy do dziwnego kraju, w którym jedynymi dostępnymi środkami płatniczymi są monety o nominałach 5 i 9. Formy płatności nie rozwinęły się na tyle, żeby płacić kartą lub czekiem, na domiar złego wybraliśmy się do cukierni, w której kasa jest zupełnie pusta i sprzedawca nie może wydać nam reszty. Widzimy świeżą, pyszną napoleonkę w cenie 7 złociaków (tutejsza waluta), jednak mimo ogromnego na nią apetytu i paru monet w kieszeni, nie jesteśmy w stanie zapłacić odpowiedniej kwoty. Sprzedawca podpowiada, byśmy w tej niezręcznej sytuacji skusili się na dwie napoleonki – razem kosztować będą 14 złociaków, które możemy uiścić przy użyciu jednej monety 5-złociakowej i jednej 9-złociakowej. Zgadzamy się na to salomonowe rozwiązanie i ze słodkościami w ręce zaczynamy zastanawiać się, jakie właściwie są ceny produktów, które możemy zakupić? Oczywiście (i niestety...), zależy to przede wszystkim od posiadanej przez nas kwoty; na potrzeby naszych rozważań założymy jednak, że wygraliśmy na loterii, wszystkie kieszenie mamy wypchane pieniędzmi i zupełnie nie musimy się martwić tym, że ich zabraknie.

Przedstawiony problem jest również znany jako Chicken McNugget Theorem: w McDonaldzie dostępne są pudełka z 9 i 20 kawałkami McNuggets. Jeżeli przychodzimy z grupą znajomych i każdy ma zjeść jeden kawałek McNugget, to w iluosobowej grupie możemy przyjść do McDonalda?

Najtańszy produkt, który możemy zakupić, ma wartość 5 złociaków; kolejne dostępne nam ceny zostały zaznaczone na rysunku 1. Po pewnym czasie spędzonym nad kartką papieru zaczynamy podejrzewać, że jesteśmy w stanie zapłacić każdą kwotę nie mniejszą niż 32 złociaki. Zachęceni naszymi sukcesami obliczeniowymi zaczęliśmy rozważać, jak wyglądałaby sytuacja, gdyby nasze dwie monety miały inne nominały? Jeśli w obiegu mielibyśmy 3- i 12-złociakówki, każda możliwa do zapłacenia cena musiałaby być podzielna przez 3; nie istniałaby zatem kwota, począwszy od której jesteśmy w stanie zapłacić każdą sumę pieniędzy (nazwijmy tę kwotę *przewodnikiem*). Jeśli jednak monetę 12-złociakową zamienimy na 14-złociakową, pracowite rachunki pokażą, że możemy zapłacić każdą kwotę nie mniejszą niż 26 (rys. 2). W tym momencie uruchamia się nasza niezawodna, matematyczna intuicja, która podpowiada, że jeśli dostępne nominały są względnie pierwsze i wynoszą p i q złociaków, to ich przewodnik wynosi $(p-1)(q-1)$. W języku matematyki naszą obserwację prezentuje następujące:



Rys. 1



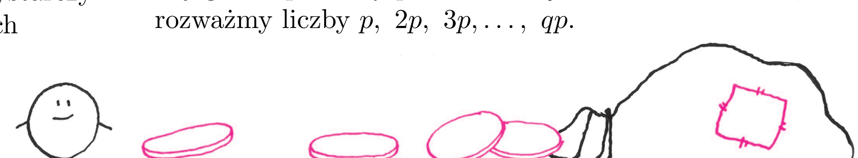
Rys. 2

Twierdzenie (Frobenius). *Dane są dwie liczby względnie pierwsze p, q. Wtedy dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant (p-1)(q-1)$ istnieją takie liczby naturalne a i b, że $n = ap + bq$.*

Zanim przedstawimy dowód, wybierzmy się do kiosku, w którym kasa nie jest zupełnie pusta i sprzedawca bez problemu może wydawać resztę. Zwróćmy uwagę, że możemy w nim zakupić nasz ulubiony miesięcznik *Delta*, który kosztuje 1 złociaka – wystarczy, że wręczymy kioskarzowi dwie monety 5-złociakowe, a on odda nam jedną monetę 9-złociakową reszty. Wnioskujemy stąd, że możemy w tym kiosku zakupić przedmiot w dowolnej cenie n złociaków – wystarczy wyciągnąć z kieszeni $2n$ monet 5-złociakowych i zażądać n monet 9-złociakowych reszty. Czy ta komfortowa dla nas sytuacja ma miejsce dla dowolnej pary względnie pierwszych nominałów? Twierdzącej odpowiedzi dostarcza poniższy

Lemat. *Dane są dwie liczby względnie pierwsze p, q. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a i b, że $n = ap - bq$.*

Pokazuje on, że jeśli mamy do dyspozycji mnóstwo monet p–złociakowych, a sprzedawca ma pod ręką ogromny stos monet q–złociakowych do wydawania reszty, to jesteśmy w stanie kupić dowolny artykuł w jego sklepie. Aby przekonać się o słuszności lematu, rozważmy liczby $p,\ 2p,\ 3p, \ldots,\ qp$.



Zauważmy, że pozostawiają one różne reszty z dzielenia przez q – istotnie, gdyby pewne dwie z nich, powiedzmy kp i lp ($k < l < q$), pozostawiały tę samą resztę, to ich różnica $(l-k)p$ byłaby podzielna przez q. Ponieważ p i q są względnie pierwsze, liczba q musiałaby dzielić $l-k$; jest to jednak niemożliwe, gdyż $0 < l-k < q$. Skoro każda z q przedstawionych na początku liczb pozostawia inną resztę z dzielenia przez q, to wyczerpują one wszystkie możliwe reszty.

Przykład dla 5- i 9-złociakówki: liczby 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 dają różne reszty z dzielenia przez 9 (kolejno 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 0), a ponieważ jest ich 9, stanowią wszystkie możliwe reszty.

W szczególności dla pewnego k naturalnego liczba kp pozostawia resztę 1 z dzielenia przez q, tzn. jest postaci $lq+1$ dla pewnego naturalnego l. Otrzymujemy zatem $1 = kp - lq$, więc przy użyciu k monet p–złociakowych możemy zakupić *Deltę*, otrzymując l monet q–złociakowych reszty. Możemy zatem nabyć przedmiot o dowolnej cenie: z poprzedniej równości wnioskujemy, że dla dowolnej liczby naturalnej n mamy $n = nkp - nlq$. Ponieważ nk i nl są liczbami naturalnymi, teza lematu została udowodniona. □

Wyposażeni w powyższy rezultat, możemy śmiało powrócić do cukierni z pustą kasą, czyli do problemu Frobeniusa. Wybierzmy dowolne $n \geqslant (p-1)(q-1)$ i korzystając z lematu, dobierzmy takie liczby naturalne a i b, że $n = ap - bq$. Proste rachunki doprowadzą nas do wniosku, że dla dowolnej liczby naturalnej m

$$n = (a - mq)p + (mp - b)q. \tag{1}$$

Oto ów prosty rachunek:
$n = ap - bq = ap - mqp + mpq - bq = (a - mq)p + (mp - b)q.$

Znajdziemy takie m, że oba współczynniki $a - mq$ i $mp - b$ będą nieujemne, czym zakończymy dowód twierdzenia. W tym celu rozważmy najmniejszą wielokrotność p, która jest nie mniejsza niż b. Innymi słowy, wybierzmy najmniejsze możliwe m, dla którego czynnik $mp - b$ jest nieujemny, tzn. takie m_0, że $(m_0 - 1)p - b < 0 \leqslant m_0p - b$. Z ostrej nierówności w łatwy sposób wynika $m_0p - b < p$, a zatem $m_0p - b \leqslant p - 1$. Przypuśćmy, że $a - m_0q < 0$, tzn. $a - m_0q \leqslant -1$. Wstawiając $m = m_0$ do (1) i korzystając z otrzymanych nierówności, mielibyśmy

$$n = (a - m_0q)p + (m_0p - b)q \leqslant -p + (p-1)q = \\ = (p-1)(q-1) - 1,$$

co przeczy założeniom twierdzenia. Otrzymana sprzeczność dowodzi nierówności $a - m_0q \geqslant 0$, a skoro $m_0p - b \geqslant 0$, dowód został zakończony. □

Ponownie odwołując się do 5- i 9-złociakówek: chcemy kupić tort za 34 złociaki. Wiemy, że $1 = 2 \cdot 5 - 9$, więc $34 = 68 \cdot 5 - 34 \cdot 9$. Najmniejsza wielokrotność 5, która jest niemniejsza od 34, to $35 = 7 \cdot 5$. Bierzemy zatem $68 - 7 \cdot 9 = 5$ monet 5-złociakowych, $7 \cdot 5 - 34 = 1$ monetę 9-złociakową i tort jest nasz!

Kiedy już mieliśmy wrażenie, że całkowicie panujemy nad naszymi wydatkami, przez kraj przetoczyła się reforma walutowa i dla ułatwienia transakcji wprowadzono trzecią monetę, 7–złociakową. Czy ułatwi to również nasze rozważania? Przewodnikiem dla trzech liczb względnie pierwszych będzie na pewno liczba nie większa od przewodników wyznaczonych dla każdej z par liczb. Przewodnik liczb 5 i 7 to 24, liczb 5 i 9 to 32, a liczb 7 i 9 to 48. Posiadając monety 5- i 7-złociakowe, jesteśmy w stanie uzyskać wszystkie liczby naturalne od 24, więc dodanie 9-złociaka do rozważań na pewno nie zwiększy nam tej liczby (nie spowoduje, że którejś wartości nie jesteśmy w stanie uzyskać), może ją co najwyżej zmniejszyć.

nominały monet	przewodnik
5, 7, 9	14
3, 5, 14	8
4, 5, 7	7

Tak się też stało, ponieważ przewodnik liczb 5, 7 i 9 wynosi 14. Przewodników dla innych trójek nominałów przedstawia tabelka powyżej – tym razem nasza matematyczna intuicja nie podpowiada żadnej zależności między dostępnymi nominałami a wartością przewodnika. Nic zresztą dziwnego – obecnie nie jest znany ogólny wzór na wyznaczenie wartości przewodnika dla trzech (lub więcej) dowolnych liczb, których największy wspólny dzielnik wynosi 1. Problem pozostaje otwarty i czeka na rozwiązanie przez głodnego wiedzy (i napoleonek!) badacza.

Deser dla troszkę starszych

Przyjrzyjmy się ponownie rysunkom 1 i 2. Zwróćmy uwagę, że w obu przypadkach liczba kwot niemożliwych do zrealizowania stanowiła połowę wartości przewodnika. Okazuje się, że jest to ogólna prawidłowość – dla dowolnej pary liczb względnie pierwszych p, q zbiór liczb, których nie można przedstawić w postaci $ap + bq$ dla $a, b \in \mathbb{N}$, ma $\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ elementów. Aby się o tym przekonać, rozważmy wielomian

$$w(x) = (1 + x^p + x^{2p} + \ldots + x^{pq})(1 + x^q + x^{2q} + \ldots + x^{pq})$$

Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych, nie większych od pq, które można przedstawić w postaci $ap + bq$ dla $a, b \in \mathbb{N}$ (zakładamy $0 \in \mathbb{N}$). Chwila refleksji pozwala stwierdzić, że wielomian w można przedstawić w postaci

$$w(x) = \sum_{n \in A} x^n + \sum_{n \in A} x^{2pq - n}$$

Oznacza to, że $2|A| = w(1) = (p+1)(q+1)$, stąd $|A| = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)$. Z twierdzenia Frobeniusa wynika, że kwoty niemożliwe do zrealizowania są mniejsze od pq, ich liczba wynosi zatem

$$(pq + 1) - \frac{1}{2}(p+1)(q+1) = \frac{1}{2}(p-1)(q-1).$$

Małą Deltę przygotowała Kamila ŁYCZEK, doktorantka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski