

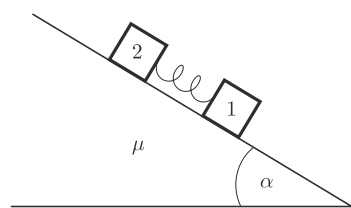
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2014

Skrót regulaminu

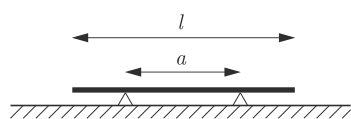
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 576, 577

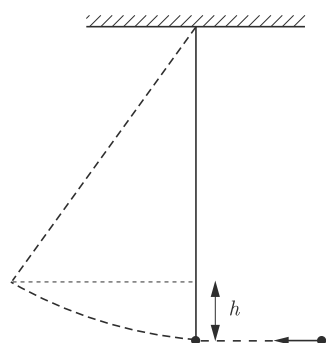
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



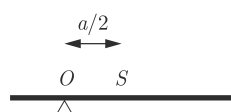
Rys. 1



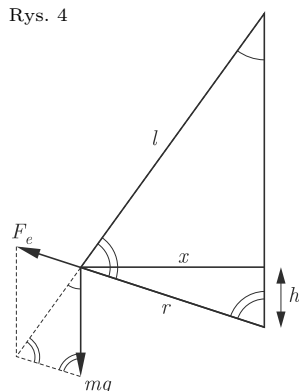
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

576. Z równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α zsuwają się dwa klocki o jednakowych masach m , połączone nieważką sprężyną o współczynniku sprężystości k (rys. 1). W chwili początkowej sprężyna jest nieodkształcona, a prędkości klocków są równe zero. Współczynnik tarcia między drugim klockiem a równią wynosi μ , przy czym $\mu < \tan \alpha$. Między pierwszym klockiem a równią tarcia nie ma. Znaleźć maksymalne wydłużenie sprężyny oraz inne wielkości charakteryzujące ruch klocków.

577. Na powierzchni długiego, nieprzewodzącego walca o promieniu R równomiernie rozłożony jest ładunek o gęstości powierzchniowej σ . Walec znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B_0 , którego linie są równoległe do osi walca. Znaleźć prędkość kątową walca po wyłączeniu zewnętrznego pola magnetycznego. Walec ma jednorodną gęstość ρ .

Rozwiązania zadań z numeru 12/2013

Przypominamy treść zadań:

568. Cienki, jednorodny pręt o masie m i długości l leży symetrycznie na dwóch podporach odległych o a (rys. 2). Jedną z podpór usunięto. Znaleźć siłę reakcji drugiej podpory natychmiast po usunięciu pierwszej.

569. Naładowana kulka o masie m wisi na elektrycznie izolowanej nici (rys. 3). Znaleźć pracę, jaką należy wykonać, przybliżając z daleka i bardzo wolno drugą naładowaną kulkę i umieszczając ją w miejscu, gdzie przedtem znajdowała się kulka wisząca na nici. Pierwsza kulka odchyliła się i podniosła na wysokość h . Przyspieszenie ziemskie g jest dane.

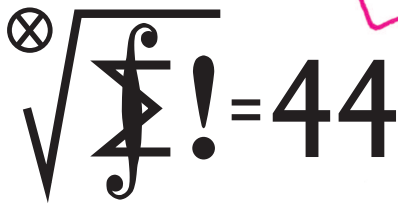
568. Po usunięciu podpory pręt zaczyna obracać się wokół drugiego punktu podparcia O (rys. 4). Równanie ruchu obrotowego ma w chwili początkowej postać $I_O \varepsilon = mga/2$, gdzie moment bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt O zgodnie z twierdzeniem Steinera wynosi

$$I_O = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 = m \frac{l^2 + 3a^2}{12}.$$

Stąd przyspieszenie kątowe pręta $\varepsilon = 6ga/(l^2 + 3a^2)$. Środek masy pręta S ma w chwili początkowej przyspieszenie $a_S = \varepsilon a/2$. Z równania ruchu środka masy $ma_S = mg - R$ otrzymujemy szukaną siłę reakcji

$$R = \frac{mgl^2}{l^2 + 3a^2}.$$

569. Wykonana praca W powoduje wzrost energii potencjalnej ciężkości zawieszanej kulki oraz energii potencjalnej oddziaływania elektrostatycznego między kulkami $W = mgh + kq_1q_2/r$, gdzie q_1, q_2 są ładunkami kulek, a r końcową odległością między kulkami. Z podobieństwa trójkątów przedstawionych na rysunku 5 otrzymujemy $mg/l = F_e/r$, gdzie $F_e = kq_1q_2/r^2$ jest siłą elektrostatycznego oddziaływania między kulkami w stanie równowagi. Zachodzi też związek $x^2 = r^2 - h^2 = l^2 - (l-h)^2$, stąd $l = r^2/(2h)$. Energia oddziaływania elektrostatycznego między kulkami wynosi $2mgh$, a szukaną pracę $W = 3mgh$.



Zadania z matematyki nr 679, 680

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 665 ($WT = 1,32$) i 666 ($WT = 1,86$) z numeru 9/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marcin Malogrosz	Warszawa	40,53
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Janusz Fiett	Warszawa	40,07
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Andrzej Idzik	Bolesławiec	38,63
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Jędrzej Garnek	Poznań	36,08

679. Na okręgu wybrano skończoną liczbę punktów i niektóre z nich oznaczono kolorem białym, a pozostałe czerwonym tak, że punktów białych jest przeszło dwukrotnie więcej niż czerwonych. Dowieść, że istnieje taki punkt biały, że każdy łuk okręgu, mający koniec w tym punkcie, zawiera więcej punktów białych niż czerwonych.

680. Dwuścienne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przecinają okrąg na nim opisany odpowiednio w punktach D, E, F . Odcinki prostych DE i DF , wyznaczone przez punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta, mają środki w punktach M i N . Odcinki AD i EF przecinają się w punkcie P . Wykazać, że środek okręgu, przechodzącego przez punkty D, M, N , leży na okręgu, przechodzącym przez punkty P, M, N .

Zadanie 680 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa

Rozwiązania zadań z numeru 12/2013

Przypominamy treść zadań:

671. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe i niektóre z tych kwadratów (skończenie wiele) zaczerniono. Każdy czarny kwadrat ma wspólne boki z dokładnie dwoma innymi czarnymi kwadratami. Ile może być czarnych kwadratów? Podać wszystkie możliwe wartości ich liczby.

672. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb wymiernych dodatnich u, v , dla których liczba $u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v}$ jest całkowita.

671. Potraktujmy zaczernione kwadraty jako wierzchołki skończonego grafu; para wierzchołków jest połączona krawędzią grafu, gdy odpowiadające im kwadraty sąsiadują (mają wspólny bok). Zgodnie z treścią zadania, z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie krawędzie. Graf rozpada się zatem na rozłączne cykle – to znany fakt (i łatwy do wykazania: z dowolnego wierzchołka rozpoczynamy wędrówkę po krawędziach grafu, nie powtarzając żadnej krawędzi; musimy wrócić do punktu wyjścia; odrzucamy powstały cykl i powtarzamy postępowanie, do wyczerpania wszystkich krawędzi).

Każdy cykl ma długość parzystą. Aby to zobaczyć, wystarczy sobie wyobrazić, że (niezależnie od zaczernień rozważanych w zadaniu) cała płaszczyzna jest „w tle” pomalowana dwoma odcieniami, jak szachownica, a sąsiadujące kwadraty mają różne odcienie; zamknięcie cyklu wymaga parzystej liczby kroków.

Tak więc liczba czarnych kwadratów jest parzysta. Jasne, że nie może ona być równa 2 i że może być równa 4. Czy może być równa 6? Musiałby to być pojedynczy cykl; znalazłby się w nim czarny kwadrat narożny K , sąsiadujący np. od wschodu i od północy z dwoma czarnymi kwadratami, K' i K'' . Kwadrat L , różny od K i sąsiadujący z K', K'' , nie może być zaczerniony (zamknąłby on cykl długości 4). Każda droga, łącząca K' z K'' i omijająca kwadraty K, L , wymaga zaczernienia więcej niż 3 kwadratów. Nie jest więc możliwe, by liczba czarnych kwadratów wyniosła 6.

Może to być wszelako każda większa liczba parzysta $2k$ ($k \geq 4$). Wystarczy wziąć prostokąt o wymiarach $(k-1) \times 3$ i zaczernić wszystkie jego pola brzegowe. Jest ich dokładnie $2k$ i tworzą cykl o wymaganej własności.

Dostajemy odpowiedź: liczba czarnych kwadratów może być dowolną dodatnią liczbą parzystą z wyjątkiem 2 oraz 6.

672. Nieskończony ciąg takich par (u_n, v_n) możemy uzyskać na przykład biorąc ciąg Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) i określając

$$u_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}, \quad v_n = F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n}^2 + 1.$$

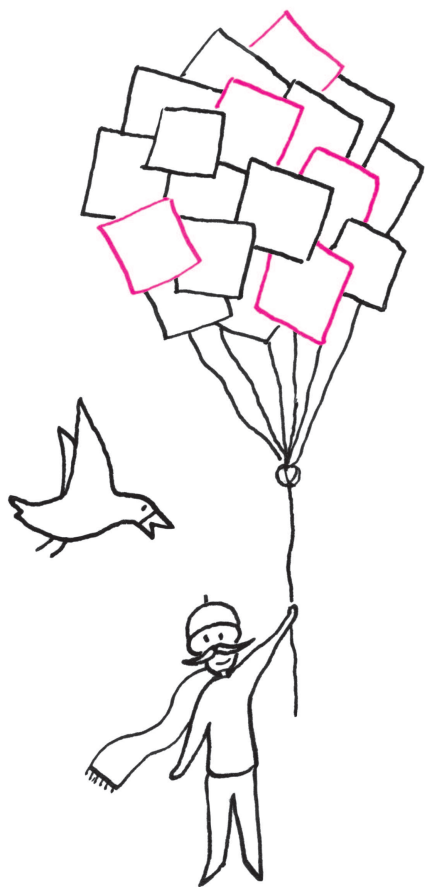
Dla każdego $n \geq 1$ mamy wówczas

$$u_n + \frac{1}{u_n} = \frac{F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2}{F_{2n+1}F_{2n-1}} = \frac{(F_{2n+1} - F_{2n-1})^2}{F_{2n+1}F_{2n-1}} + 2 = \frac{F_{2n}^2}{v_n} + 2 = \frac{v_n - 1}{v_n} + 2 = 3 - \frac{1}{v_n},$$

a zatem suma

$$u_n + \frac{1}{u_n} + v_n + \frac{1}{v_n} = 3 + v_n$$

jest liczbą całkowitą.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 562 ($WT = 1,30$), 563 ($WT = 3,40$), 564 ($WT = 1,56$) i 65 ($WT = 2,07$) z numerów 9/2013 i 10/2013

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	45,121
Krzysztof Magiera	Łosiów	42,601
Michał Koźlik	Gliwice	40,781
Jacek Konieczny	Poznań	25,551
Ryszard Woźniak	Kraków	22,11
Tomasz Wietecha	Tarnów	22,37

Liczbę 44 punktów po raz trzeci przekroczył pan Andrzej Nowogrodzki. Gratulujemy! W podsumowaniu ligi zamieszczonym w numerze 2/014 złośliwy chochlik usunął nazwisko pana Ryszarda Woźniaka. Bardzo przepraszamy!