Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2014

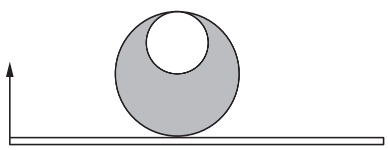
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 574, 575

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



Rys. 1

574. Na desce leży walec o promieniu R z wydrążeniem w kształcie walca o promieniu $R/2$ stycznym do osi walca (rys. 1). Deskę zaczynamy wolno podnosić za jeden koniec. Znaleźć kąt graniczny nachylenia deski, przy którym walec pozostanie jeszcze w równowadze. Współczynnik tarcia walca o deskę jest równy $\mu = 0{,}2$.

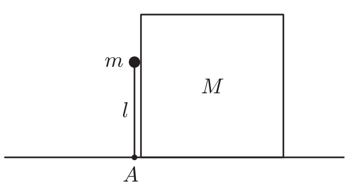
575. Okładki płaskiego kondensatora powietrznego o powierzchni S i wysokości h są skierowane pionowo i zanurzone w cieczy o stałej dielektrycznej ϵ do wysokości $h/3$. Oblicz ładunek, jakim naładowany jest kondensator, jeżeli w stanie równowagi ciecz wypełnia całą przestrzeń między okładkami. Gęstość cieczy wynosi ρ, odległość między okładkami jest mała w porównaniu z rozmiarami liniowymi okładek.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2013

Przypominamy treść zadań:

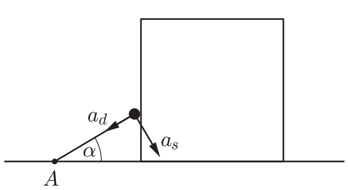
566. Na dachu nachylonym do poziomu pod kątem φ leży ołowiana blacha. Współczynnik tarcia ołowiu o dach to $\mu > \operatorname{tg}\varphi$. Współczynnik rozszerzalności liniowej ołowiu wynosi α. Zakładamy, że temperatura w ciągu doby wzrasta od wartości t_1 do t_2, a potem ponownie obniża się do t_1. Długość blachy przy minimalnej temperaturze t_1 jest równa l. Na jaką odległość blacha spełznie z dachu w ciągu doby?

567. Nieważki pręt o długości l z niewielkim ciężarkiem o masie m na końcu może obracać się wokół punktu A i znajduje się w położeniu pionowym, dotykając klocka o masie M (rys. 2). W wyniku lekkiego popchnięcia układ zostaje wprawiony w ruch. Jaki musi być stosunek mas m/M, aby w chwili utraty kontaktu ciężarka z klockiem pręt tworzył z poziomem kąt $\alpha_0 = \pi/6$? Ile będzie wynosić w tym momencie prędkość klocka? Tarcie zaniedbać.



Rys. 2

566. Siły rozszerzalności cieplnej są bardzo duże i wymuszają przesuwanie się fragmentów blachy względem dachu. Gdy blacha ogrzewa się, jej punkt nieruchomy znajduje się powyżej środka masy. Oznaczmy jego odległość od środka masy przez x. Siła tarcia działająca na wydłużającą się blachę poniżej punktu nieruchomego działa w górę równi i wynosi $T_1 = \mu(m/2 + mx/l)\mathrm{g}\cos\varphi$, a powyżej tego punktu $T_2 = \mu(m/2 - mx/l)\mathrm{g}\cos\varphi$ działa w dół równi. Warunek równowagi statycznej dla punktu nieruchomego ma postać: $m\mathrm{g}\sin\varphi + T_2 = T_1$, stąd $x = l\operatorname{tg}\varphi/(2\mu)$. Wydłużenie blachy podczas ogrzewania wynosi $\Delta l = l\alpha(t_2 - t_1)$, a jej środek przesuwa się w dół o $s_1 = x\Delta l/l = l\alpha(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi/(2\mu)$. Gdy blacha stygnie, jej punkt nieruchomy znajduje się poniżej środka masy, również w odległości x. Środek blachy ponownie przesuwa się w dół na taką samą odległość jak podczas ogrzewania. W ciągu doby blacha spełza w dół na odległość $s = l\alpha(t_2 - t_1)\operatorname{tg}\varphi/\mu$.



Rys. 3

567. Ciężarek na końcu pręta porusza się po okręgu, a jego przyspieszenie ma składową dośrodkową $a_d = v^2/l$ oraz składową styczną do toru a_s, gdzie v jest chwilową prędkością ciężarka (rys. 3). Ciężarek popycha klocek, który porusza się z przyspieszeniem $a_M = a_s\sin\alpha - v^2\cos\alpha/l$. W chwili utraty kontaktu ciężarka z klockiem $a_M = 0$, a składowa przyspieszenia ciężarka styczna do toru spowodowana jest tylko siłą ciężkości: $a_s = \mathrm{g}\cos\alpha_0$. Prędkość ciężarka w tym momencie wynosi $v_0 = \sqrt{\mathrm{g}l/2}$, a prędkość klocka $u = v_0\sin\alpha_0 = \sqrt{\mathrm{g}l/8}$. Z zasady zachowania energii otrzymujemy: $m\mathrm{g}l = m\mathrm{g}l\sin\alpha_0 + mv_0^2/2 + Mv_0^2\sin^2\alpha_0/2$ i stąd szukany stosunek mas wynosi $m/M = 4$.

Klub 44

$\otimes\sqrt{\not{\int}!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2014

Zadania z matematyki nr 677, 678

Redaguje Marcin E. KUCZMA

677. Rozważamy trójki liczb rzeczywistych (x, y, z), spełniające warunki

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad x^2+y^2+z^2>yz+zx+xy.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu xyz.

678. Czy istnieją takie trzy różne liczby pierwsze p, q, r, że liczba $2^{q-1}-1$ dzieli się przez p, liczba $2^{r-1}-1$ dzieli się przez q, zaś liczba $2^{p-1}-1$ dzieli się przez r?

Zadanie 678 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi

Rozwiązania zadań z numeru 11/2013

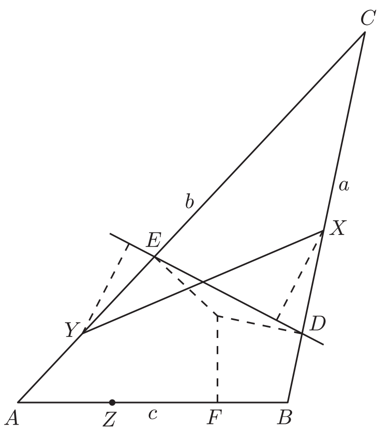
Przypominamy treść zadań:

669. W trójkącie ABC okrąg wpisany jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkty X, Y, Z zostały obrane odpowiednio na bokach BC, CA, AB tak, że $|AY|=|AZ|$, $|BX|=|BZ|$. Dowieść, że prosta DE połowi odcinek XY.

670. Udowodnić nierówność

$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}+\frac{b^2+1}{c^2+a+1}+\frac{c^2+1}{a^2+b+1}\geqslant 2$$

dla liczb rzeczywistych $a, b, c>-1$.



669. Przyjmijmy zwykłe oznaczenia: $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$. Równości

$$|CX|=a-|BX|=a-|BZ|, \qquad |CY|=b-|AY|=b-|AZ|$$

dodajemy stronami i otrzymujemy

$$|CX|+|CY|=a+b-c=2\cdot|CD|=2\cdot|CE|.$$

To znaczy, że punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej DE, w jednakowych odległościach od odpowiednich końców odcinka DE:

$$|DX|=|EY|.$$

Wobec równoramienności trójkąta CDE oznacza to z kolei, że punkty X i Y leżą w jednakowych odległościach od prostej DE. Stąd już wynika, że ta prosta przechodzi przez środek odcinka XY.

670. Niech M będzie średnią arytmetyczną liczb a^2, b^2, c^2. Oznaczmy:

$$\frac{a^2+1}{M+1}=1+3x, \qquad \frac{b^2+1}{M+1}=1+3y, \qquad \frac{c^2+1}{M+1}=1+3z.$$

Suma liczb napisanych po lewych stronach wynosi 3. Zatem i suma liczb po prawych stronach wynosi 3; a to znaczy, że $x+y+z=0$. Stąd

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}\big((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\big)\leqslant 0.$$

W nierówności danej do udowodnienia wyodrębniamy pierwszy składnik i szacujemy z góry jego mianownik:

$$b^2+c+1\leqslant b^2+1+\frac{c^2+1}{2}=(M+1)(1+3y)+\frac{1}{2}(M+1)(1+3z)=$$
$$=\frac{3}{2}(M+1)(1+2y+z).$$

Liczba b^2+c+1 jest dodatnia (tu korzystamy z założenia, że $c>-1$), zatem po prawej stronie ostatniej nierówności mamy również liczbę dodatnią, i wobec tego

$$\frac{1}{b^2+c+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{M+1}\cdot\frac{1}{1+(2y+z)}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{M+1}\cdot\big(1-(2y+z)\big).$$

Stąd

$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{1-(2y+z)}{M+1}\cdot(1+3x)(M+1)=\frac{2}{3}(1-2y-z+3x-6xy-3xz).$$

Mamy też analogiczne oszacowanie dla pozostałych dwóch składników zadanej nierówności. Po dodaniu stronami otrzymujemy (pamiętając, że $x+y+z=0$ oraz $xy+yz+zx\leqslant 0$):

$$\frac{a^2+1}{b^2+c+1}+\frac{b^2+1}{c^2+a+1}+\frac{c^2+1}{a^2+b+1}\geqslant\frac{2}{3}\big(3-9(xy+yz+zx)\big)\geqslant 2.$$