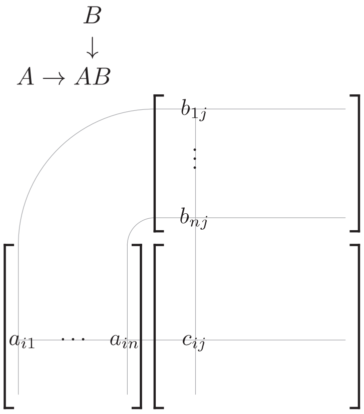
Schemat Falka

Przemysław KICIAK[*]

Wbrew często (i zazwyczaj bezmyślnie) powtarzanemu przysłowiu *nie każdy* obraz jest wart tysiąca słów. Ale niektóre są. Każdy student matematyki, informatyki lub politechniki na pierwszym roku poznaje wzór, który definiuje iloczyn macierzy: jeśli liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B, to ich iloczynem jest macierz AB, której współczynniki to $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Takie mnożenie macierzy jest znane od XIX wieku. Dopiero wiek później został wynaleziony sposób jego zobrazowania, który dla mnie jest wart tysiąca słów, a nawet trochę więcej.



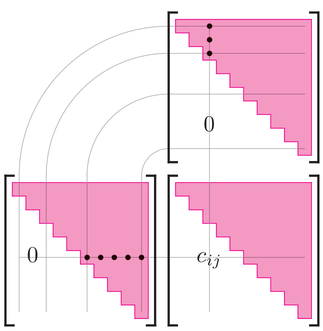
Rys. 1

Schemat Falka, bo tak się ten wynalazek nazywa, składa się z tabelek ze współczynnikami macierzy, rozmieszczonych jak na rysunku 1. Łatwo jest na nim odnaleźć współczynniki macierzy A (na lewo) i B (powyżej), które mają wpływ na współczynnik c_{ij} iloczynu. Wszystkie znane własności mnożenia macierzy mają, oczywiście, dowody rachunkowe. Schemat Falka pozwala *zobaczyć* wiele z tych własności, a to jest w pewnym sensie coś więcej niż dowód.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{bmatrix} \end{array}$$

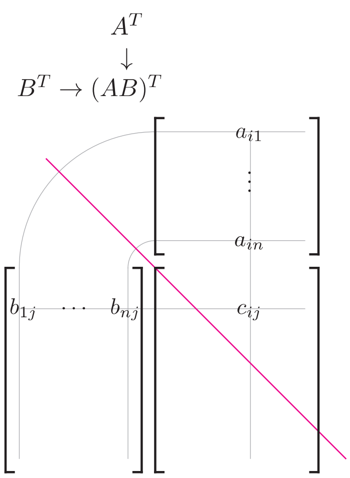
Rys. 2

Własność 1. Współczynniki nie muszą być liczbami, byleby można je było jakoś mnożyć, a iloczyny jakoś dodawać; w tym sensie definicja iloczynu macierzy jest uniwersalna. Na przykład (rys. 2) współczynnikami mogą być macierze (zwane **blokami**), jeśli tylko „pasują”, tj. dla każdego i wszystkie bloki A_{ik} mają tyle samo wierszy, dla każdego j wszystkie bloki B_{kj} mają tyle samo kolumn, i dla każdego k każdy blok A_{ik} ma tyle samo kolumn, ile bloki B_{kj} mają wierszy. Jeśli bloki są macierzami liczbowymi, to mamy stąd ogólniejszy zapis mnożenia macierzy liczbowych. Można też rozpatrywać bloki puste, tj. mające 0 wierszy lub kolumn, co czasami jest wygodne.



Rys. 3

Własność 2. O macierzy A mówi się, że jest **trójkątna górna**, jeśli wszystkie jej współczynniki a_{ij}, takie że $i > j$, są równe 0. Mnożenie macierzy ma tę własność, że jeśli obie macierze A i B są trójkątne górne, to ich iloczyn też jest taki. Spójrzmy na rysunek 3: po odnalezieniu współczynników w i-tym wierszu macierzy A i j-tej kolumnie macierzy B zauważamy, że jeśli $i > j$, to w każdym iloczynie $a_{ik}b_{kj}$ co najmniej jeden czynnik jest zerem, a stąd $c_{ij} = 0$. Analogiczna własność dotyczy macierzy trójkątnych dolnych (takich że $a_{ij} = b_{ij} = 0$ dla $i < j$), co proponuję Czytelnikom narysować własnoręcznie.



Rys. 4

Własność 3. Transpozycja przyporządkowuje dowolnej macierzy A o współczynnikach a_{ij} macierz A^T o współczynnikach a_{ji}; inaczej mówiąc, przekształcenie to zamienia wiersze z kolumnami. Jeśli macierze A i B można pomnożyć (i mnożenie współczynników jest przemienne), to $(AB)^T = B^TA^T$. Ze schematu Falka to wynika natychmiast po narysowaniu jego odbicia symetrycznego względem ukośnej linii (tzw. diagonali macierzy AB), porównaj rysunki 1 i 4. Mnożenie macierzy (bloków) nie jest przemienne, dlatego dokonując transpozycji iloczynu macierzy zbudowanych z bloków, tj. „odbijając” schemat Falka, musimy „odbić”, czyli transponować każdy blok macierzy A i B i ich iloczynu. Ale to po obejrzeniu rysunków jest oczywiste.

Własności 4 i 5. Macierz A jest **diagonalna**, jeśli wszystkie współczynniki oprócz a_{ii} ma zerowe. **Macierz permutacji** jest to macierz kwadratowa, która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma jeden współczynnik równy 1, i pozostałe współczynniki 0. Wiersz i-ty macierzy AB, gdzie macierz A jest diagonalna, jest iloczynem współczynnika a_{ii} i i-tego wiersza macierzy B. Jeśli zaś A jest macierzą permutacji, to iloczyn AB powstaje przez poprzestawianie wierszy macierzy B. Narysowanie schematów (najlepiej z użyciem bloków) i doprecyzowanie szczegółów polecam dla relaksu. A co będzie, jeśli to drugi (tj. prawy) czynnik jest macierzą diagonalną lub permutacji?

Własność 6. Łączności mnożenia macierzy tak całkiem bez rachunków pokazać się nie da, ale zobaczmy schematy na rysunku 5. Jest jasne, że wymiary macierzy $(AB)C$ i $A(BC)$ są identyczne. Jeśli w miejsce A podstawimy blok A_i – i-ty wiersz macierzy A i zastąpimy C przez j-tą kolumnę, C_j, to w obu przypadkach dostaniemy współczynnik na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny

[*]Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

$$
\begin{tikzcd}
& B \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A \arrow[r] & AB \arrow[r] & (AB)C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[d] \\
B \arrow[r] & BC \arrow[d] \\
A \arrow[r] & A(BC)
\end{tikzcd}
$$

Rys. 5

odpowiedniego iloczynu wszystkich trzech macierzy. Wyróżnimy w macierzach bloki

$$A_i = [\, A_{i1} \quad A_{i2} \,], \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \qquad C_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ C_{2j} \end{bmatrix}.$$

Podstawiając tak podzielone macierze do pierwszego schematu, dostaniemy

$$(A_iB)C_j = (A_{i1}B_{11} + A_{i2}B_{21})C_{1j} + (A_{i1}B_{12} + A_{i2}B_{22})C_{2j},$$

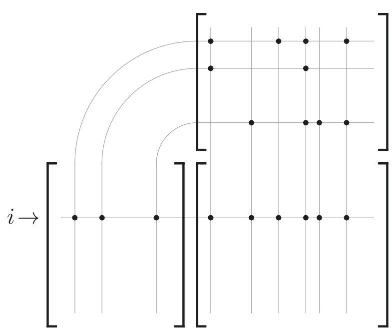
a z drugiego schematu otrzymamy

$$A_i(BC_j) = A_{i1}(B_{11}C_{1j} + B_{12}C_{2j}) + A_{i2}(B_{21}C_{1j} + B_{22}C_{2j}).$$

Jeśli mnożenie *mniejszych* bloków jest łączne i rozdzielne względem dodawania, a dodawanie jest przemienne, to oba te wyrażenia mają tę samą wartość. Ale to umożliwia przeprowadzenie dowodu indukcyjnego, zaczynając od bloków pustych i bloków 1×1, tj. zbudowanych z pojedynczych współczynników.

O architekturze CUDA pisaliśmy w *Delcie* 9/2011.

Schemat Falka z blokowym przedstawieniem macierzy został wykorzystany do zilustrowania bardzo pięknego, równoległego algorytmu mnożenia *dużych* macierzy przy użyciu karty graficznej w architekturze CUDA; zachęcam do zapoznania się z nim w dokumentacji firmy NVIDIA. Tu zaś wykorzystamy schemat Falka do przedstawienia idei szybkiego (sekwencyjnego) algorytmu mnożenia *wielkich* macierzy rzadkich, czyli takich, których większość współczynników (np. ponad 99%) to zera. Iloczyn macierzy rzadkich zwykle też jest macierzą rzadką, a przy tym każdy (lub prawie każdy) jego niezerowy współczynnik jest sumą niewielu niezerowych składników. Dopuszczamy zupełnie dowolne rozmieszczenie niezerowych współczynników w macierzach A i B. Chcielibyśmy, aby algorytm mnożył i dodawał tylko liczby różne od zera.

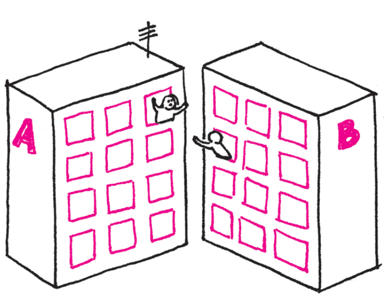


Rys. 6

Zobaczmy schemat na rysunku 6. W pokazanym przykładzie i-ty wiersz macierzy A zawiera tylko trzy niezerowe współczynniki. Aby obliczyć i-ty wiersz iloczynu, trzeba pomnożyć przez nie odpowiednie trzy wiersze macierzy B i dodać. Oczywiście, wystarczy odnaleźć i pomnożyć tylko niezerowe współczynniki macierzy B w tych wierszach.

Obie macierze i ich iloczyn będziemy reprezentować za pomocą wykazów niezerowych współczynników. Wykaz jest tablicą, której każdy element zawiera indeksy wiersza i kolumny oraz niezerowy współczynnik na ich przecięciu.

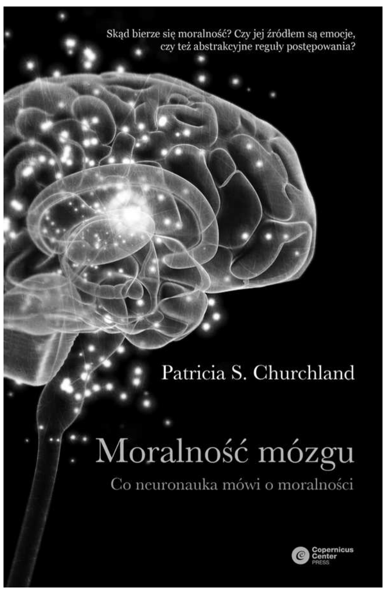
Porządkiem wierszowym wykazu współczynników macierzy nazwiemy taką kolejność jego elementów, że elementy reprezentujące niezerowe współczynniki z każdego kolejnego wiersza są obok siebie (a w obrębie wiersza elementy są uporządkowane dowolnie). W pierwszym kroku algorytmu należy (np. za pomocą sortowania) uporządkować w ten sposób wykazy obu macierzy, A i B. Następnie tworzymy dwie tablice pomocnicze, których długości są o 1 większe od liczb wierszy tych macierzy. Kolejne elementy tablicy pomocniczej są indeksami uporządkowanego wykazu, umożliwiającymi szybki dostęp do elementów reprezentujących współczynniki każdego wiersza (liczba niezerowych współczynników w wierszu jest różnicą dwóch kolejnych indeksów w pomocniczej tablicy, jej ostatni element razem z przedostatnim umożliwia obliczenie liczby tych współczynników w ostatnim wierszu).



Aby obliczyć iloczyn AB, przeglądamy kolejne wiersze macierzy A. Dla współczynnika $a_{ik} \neq 0$ znajdujemy elementy reprezentujące niezerowe współczynniki w k-tym wierszu macierzy B. Dla każdego takiego elementu, w dodatkowej tablicy, zapamiętujemy trójkę liczb: indeks elementu reprezentującego współczynnik a_{ik} w wykazie A, indeks elementu reprezentującego współczynnik b_{kj} w wykazie B i indeks j odpowiedniej kolumny macierzy B (czyli także iloczynu). Mając wszystkie takie trójki dla i-tego wiersza macierzy A (i iloczynu), sortujemy ich ciąg względem indeksów kolumn j. Po tym posortowaniu łatwo jest odnaleźć odpowiednie współczynniki macierzy A i B i wykonać działania na nich, ponieważ iloczyny, których sumę trzeba obliczyć, są reprezentowane przez trójki znajdujące się obok siebie. W ten sposób otrzymamy niezerowe współczynniki w i-tym wierszu macierzy AB, a ściślej te współczynniki, które są sumami niezerowych składników.

Koszt tego algorytmu w istotny sposób zależy od użytego algorytmu sortowania, ale są znane bardzo szybkie algorytmy sortowania, których użycie sprawia, że obliczenia pomocnicze zabierają tylko kilka razy więcej czasu niż same działania na współczynnikach. Można też opracować podobny algorytm, korzystający z kolumnowego uporządkowania wykazów.

Rysunkowe przedstawienie mnożenia macierzy wymyślił w latach 50. dwudziestego wieku Sigurd Falk, profesor politechniki w Brunszwiku. Opisane wyżej przykłady nie wyczerpują zastosowań tego wynalazku, ale mam nadzieję, że uzasadniają jego wartość, przy użyciu kilku obrazków i w przybliżeniu 1100 słów.

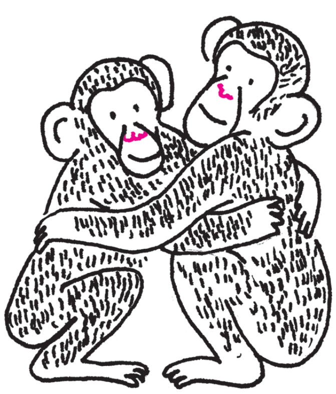


Prawa prawdziwie naturalne

Umysł to wytwór mózgu. Budowa i funkcjonowanie mózgu człowieka i innych zwierząt jest wynikiem milionów lat ewolucji. Aspektów działania umysłu, na przykład tego, co uważamy za moralne, nie da się zatem zrozumieć bez wnikania w to, jak odpowiednie pojęcia mogły się w toku ewolucji wytworzyć i zmieniać. Oznacza to, że każda intelektualnie uczciwa próba zrozumienia ludzkiej moralności wymaga – prócz języka historii filozofii – zastosowania najnowszych osiągnięć neurobiologii, ewolucjonizmu i psychologii.

Wczesnymi próbami w tym zakresie były prace E.O. Wilsona, socjobiologa, a dzięki wielu interesującym książkom, m.in. S. Pinkera, językoznawcy, próby wyjaśnienia ludzkiego zachowania w zarysowany wyżej sposób zdobyły pewną popularność, zwłaszcza w środowiskach racjonalistycznych. Nie było jednak dotąd w języku polskim publikacji, która w sposób precyzyjny i przystępny analizowałaby moralność z uwzględnieniem współczesnej wiedzy o mózgu. Lukę tę wypełnia wydana właśnie książka filozofki Patricii S. Churchland „Moralność mózgu" (Copernicus Center Press).

Warunkiem niezbędnym do mówienia o moralności jest występowanie więzi społecznych. Churchland opisuje szczegółowo, lecz interesująco, budowę i funkcjonowanie ośrodków kary i nagrody w mózgu, a także to, jak troska o siebie, zapewniana poprawnym działaniem tych ośrodków, może się uogólnić na troskę o innych. Równie dokładnie autorka wprowadza czytelnika w świat mechanizmów dziedziczenia, a jej opis, jak zachowanie jest uwarunkowane przez geny, niewątpliwie wywoła nie lada wrażenie na tych, którym genetyka kojarzy się wyłącznie z Mendlem i jego groszkiem pachnącym.



Nie oznacza to bynajmniej, że Churchland przyjmuje za dobrą monetę wszystkie narracje na temat działania mózgu, jakie funkcjonują w środowisku neurobiologów – przeciwnie, jak na rasowego filozofa przystało, stara się je krytycznie zanalizować. Doskonałym przykładem jest kwestia znanych od zaledwie 22 lat neuronów lustrzanych, komórek kory mózgowej aktywujących się zarówno w przypadku, gdy osobnik (małpa) wykonuje określony ruch, jak i gdy obserwuje innego osobnika taki ruch wykonującego. Ileż postawiono dalekosiężnych hipotez dotyczących zaangażowania neuronów lustrzanych w percepcji stanów umysłowych innych ludzi oraz empatii! Churchland konsekwentnie wskazuje na mielizny wnioskowania w przypadku tego typu hipotez, starając się precyzyjnie określić, gdzie znajduje się granica między pewnym a prawdopodobnym oraz prawdopodobnym a dopuszczalnym.

Wydaje się zaskakujące, u jak wielu ludzi pokutuje kartezjański pogląd o roli introspekcji w analizie umysłu. Dla tych wszystkich – oraz dla każdego, kto chciałby wiedzieć, jak działa świat – świetnie napisana i doskonale udokumentowana książka Patricii S. Churchland powinna być lekturą obowiązkową.

Ewelina KNAPSKA

Pracownia Neurobiologii Emocji, Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego PAN w Warszawie