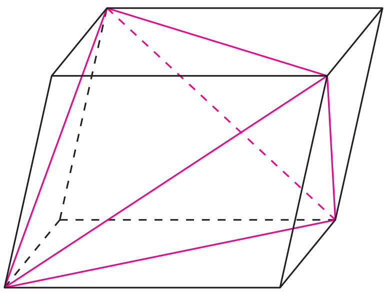
Postaw na krawędzi!

Joanna JASZUŃSKA

Postawmy czworościan na krawędzi i przez każdą jego krawędź poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi. Takich sześć płaszczyzn wyznacza *równoległościan opisany* na czworościanie (rysunek).

Również na odwrót, wybierając cztery wierzchołki dowolnego równoległościanu tak, by żadne dwa nie były połączone krawędzią, otrzymamy *czworościan wpisany*. Pozostałe cztery wierzchołki wyznaczają przystający czworościan, symetryczny względem środka równoległościanu.



Czworościan wpisany można uzyskać z równoległościanu, odcinając od niego cztery przystające naroża; podstawą każdego z nich jest połowa podstawy równoległościanu, a wysokością – wysokość równoległościanu. Stąd objętość czworościanu wpisanego równa jest $\frac{1}{3}$ objętości równoległościanu.

1. Dany jest czworościan foremny o krawędzi 1 oraz punkt P w jego wnętrzu. Suma odległości punktu P od krawędzi tego czworościanu jest równa s. Wykaż, że $s \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

2. Czy istnieją czworościany S i T o następujących dwóch własnościach:
(a) objętość czworościanu S jest większa od objętości czworościanu T;
(b) pole każdej ściany czworościanu S nie przekracza pola żadnej ściany czworościanu T?

3. Rozstrzygnij, czy można obliczyć objętość czworościanu, znając pola jego czterech ścian oraz promień kuli opisanej.

Zadania 1, 2, 3 pochodzą odpowiednio z Obozu Naukowego po VIII Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów, z XLII OM oraz z XLIV OM.

Wzór Herona pozwala obliczyć pole trójkąta, gdy znamy długości jego boków. Zadanie 3 dotyczy jednego z możliwych uogólnień tego wzoru – więcej o tym w następnym *deltoidzie*.

Rozwiązania

R1. Równoległościanem opisanym na czworościanie foremnym o krawędzi 1 jest sześcian o krawędzi $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Suma odległości punktu P od dwóch przeciwległych krawędzi czworościanu jest nie mniejsza od sumy odległości P od zawierających je przeciwległych ścian sześcianu, która z kolei jest większa lub równa odległości pomiędzy takimi ścianami, czyli długości krawędzi sześcianu. Czworościan ma trzy pary przeciwległych krawędzi, stąd $s \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{2}$. □

R2. Tak, dla każdego czworościanu S zbudujemy czworościan T o żądanych własnościach. Niech $a > 0$ będzie taką liczbą, aby liczba $\frac{1}{2}a^2$ była większa od pola każdej ściany czworościanu S. Niech $b > 0$ będzie taką liczbą, aby liczba $\frac{1}{3}a^2b$ była mniejsza od objętości czworościanu S.

Niech T będzie czworościanem wpisanym w prostopadłościan o podstawie $a \times a$ i wysokości b. Objętość T równa jest $\frac{1}{3}a^2b$. Każdą ścianę czworościanu T można zrzutować na połowę podstawy prostopadłościanu, więc jej pole przekracza $\frac{1}{2}a^2$. Z definicji liczb a i b, czworościany S i T spełniają żądane warunki. □

R3. Wykażemy, że nie można. Rozważmy czworościany C_1 i C_2 wpisane odpowiednio w prostopadłościany o wymiarach $\sqrt{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ oraz $\sqrt{6} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$.

Promienie opisanych na nich kul to połowy głównych przekątnych prostopadłościanów, więc są one równe: $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2+5+5} = \sqrt{3}$ oraz $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{6+3+3} = \sqrt{3}$.

Z twierdzenia Pitagorasa, każda ściana czworościanu C_1 jest trójkątem o bokach $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$, $\sqrt{2+5} = \sqrt{7}$ oraz $\sqrt{5+5} = \sqrt{10}$. Wysokość takiego trójkąta, opuszczona na bok o długości $\sqrt{10}$, równa jest

$$\sqrt{7 - \frac{10}{4}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Stąd pole każdej ze ścian czworościanu C_1 równe jest

$$\frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{5}.$$

Analogicznie pole każdej ściany czworościanu C_2 też równe jest $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

Czworościany C_1 i C_2 mają więc równe pola ścian i promienie kul opisanych. Tymczasem ich objętości są różne: $V_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$ oraz $V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{6}$. □

Zadania domowe

4. Wyznacz promień kuli wpisanej w krawędzie czworościanu foremnego o objętości 1.

5. Wykaż, że jeśli w pewnym czworościanie dwie pary przeciwległych krawędzi są prostopadłe, to również trzecia para jest prostopadła.

Wskazówka. Ściany równoległościanu opisanego są rombami.