Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

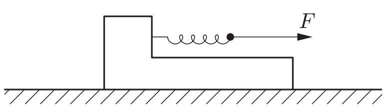
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 572, 573

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

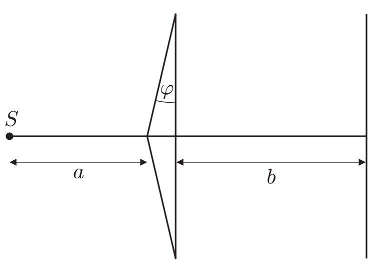
572. Dynamometr ciągnięty jest po gładkim poziomym stole siłą $F = 4\text{N}$ (rys. 1). Co wskazuje dynamometr, jeżeli masa sprężyny równa jest masie obudowy? Dynamometr został wyskalowany w położeniu poziomym.



Rys. 1

573. Na bipryzmat przedstawiony na rysunku 2 pada światło monochromatyczne ze źródła punktowego S. Na ekranie powstaje obraz interferencyjny. Znaleźć odległość pierwszego maksimum interferencyjnego od środka ekranu. Dane są: a – odległość źródła od bipryzmatu, b – odległość bipryzmatu od ekranu, φ – kąt łamiący każdego z pryzmatów, który jest bardzo mały, n – współczynnik załamania szkła, z którego wykonany jest bipryzmat, λ – długość fali światła emitowanego przez źródło. Promienie interferujące padają na ekran prawie prostopadle.

Wskazówka. Należy wykazać, że każdy z pryzmatów daje pozorny obraz źródła światła, którego przybliżona odległość od pryzmatu jest taka sama jak źródła.

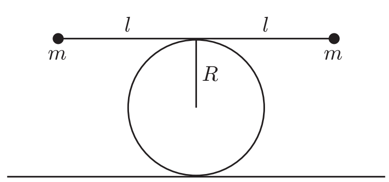


Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

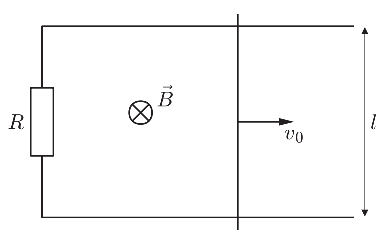
Przypominamy treść zadań:

564. Na nieruchomym walcu o promieniu R leży nieważki pręt o długości $2l$, na którego końcach znajdują się małe kulki o masach m (rys. 3). Znaleźć okres małych drgań pręta wokół położenia równowagi. Nie ma poślizgu między walcem a prętem.



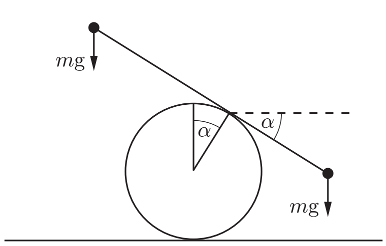
Rys. 3

565. Po równoległych, poziomych szynach spiętych oporem R może poruszać się bez tarcia pręt o masie m. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny szyn (rys. 4). Odległość między szynami wynosi l. W chwili początkowej prętowi nadano prędkość v_0, równoległą do szyn. Jaką drogę przebędzie pręt do momentu zatrzymania? Jaki ładunek przepłynie w tym czasie przez opór R? Opór szyn i pręta zaniedbujemy.



Rys. 4

564. Po wychyleniu pręta o kąt α z położenia równowagi (rys. 5) działa na niego moment skręcający do położenia równowagi $M = mg[(l - R\alpha) - (l + R\alpha)]\cos\alpha$. Dla małych wychyleń z położenia równowagi $M \approx -2mgR\alpha$. Ponieważ nie ma poślizgu, ruch pręta jest czystym obrotem względem chwilowej osi przechodzącej przez punkt styczności pręta z walcem, a jego moment bezwładności względem tej osi to $I \approx 2ml^2$. Równanie ruchu obrotowego ma postać $I\varepsilon = M$, gdzie $\varepsilon = d^2\alpha/dt^2$ jest przyspieszeniem kątowym. Jest to równanie ruchu harmonicznego: $d^2\alpha/dt^2 + \mathrm{G}R\alpha/l^2 = 0$. Częstość drgań wynosi $\omega = \mathrm{g}R/l^2$, szukany okres drgań $T = 2\pi l/\sqrt{\mathrm{g}R}$.



Rys. 5

565. W poruszającym się pręcie indukuje się siła elektromotoryczna indukcji. Jej wartość, zgodnie z prawem Faradaya, wynosi $\varepsilon = Blv$, gdzie v jest chwilową prędkością pręta. Na pręt, w którym płynie prąd indukcyjny, działa hamująca siła elektrodynamiczna o wartości $F = B^2l^2v/R$. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki $F\Delta t = \Delta p$ i możemy napisać: $B^2l^2v\Delta t/R = m\Delta v$. Wyrażenie $\Delta s = v\Delta t$ jest drogą przebytą w przedziale czasu Δt. Po zsumowaniu otrzymujemy $B^2l^2s/R = mv_0$. Szukana droga przebyta przez pręt wynosi $s = mv_0R/(B^2l^2)$. Chwilowe natężenie prądu indukcyjnego w obwodzie dane jest wzorem $I = Bvl/R$, a z definicji natężenia prądu $I = \Delta Q/\Delta t$, gdzie ΔQ jest ładunkiem przepływającym w czasie Δt przez opór. Stąd dla krótkich przedziałów czasowych mamy $\Delta Q = Bl\Delta s/R$. Po zsumowaniu i uwzględnieniu poprzednich wyników otrzymujemy szukany ładunek równy $Q = mv_0/(Bl)$.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po 541 zadaniach

Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2 – 43,72
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2 – 37,67
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Jacek Konieczny (Poznań)	24,15
Tomasz Wietecha (Tarnów)	9 – 17,44
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	1 – 12,68

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2011–2013 oraz mają w bieżącej punktacji na swoim koncie co najmniej 11 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (11), T. Wietecha (9), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni": M. Koźlik, J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski, J. Piotrowski;

„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Łącki, M. Łupieżowiec, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

W ostatnich latach zakres umiejętności matematycznych nabywanych w liceum bardzo się skurczył, w szczególności dotyczy to rachunku różniczkowego. Dlatego wszystkie zadania z fizyki zaproponowane w ubiegłym roku w Klubie 44F można było rozwiązać, posługując się elementarną matematyką. Wymagało to czasami wyboru odpowiedniego układu odniesienia. Na przykład, w zadaniu 543, gdzie należało wyznaczyć naprężenie ograniczającej ruch biegnącego psa linki zakończonej pierścieniem przesuwającym się po drucie, wygodnie było wybrać układ odniesienia związany z pierścieniem, co pozwalało sprowadzić problem do ruchu jednego ciała. Podobnie w zadaniu 561 z kondensatorem w polu magnetycznym najwygodniej było prowadzić rozważania w układzie odniesienia, w którym nie ma pola elektrycznego. Niekiedy potrzebny był sprytny pomysł, jak w zadaniu 546 z wodą wyciekającą spod naczynia. Okazuje się jednak, że większość uczestników ligi rachunkiem różniczkowym i całkowym posługuje się biegle, toteż przysyłane rozwiązania często różniły się od firmowych – i były bardziej pracochłonne.

W konkurencji „najwyższy stopień trudności" pierwsze miejsce ($WT = 2{,}7$) zajęło zadanie 553 (ładowanie kondensatora przez diodę o znanej charakterystyce). Błędy były tu dosyć urozmaicone, najczęściej nie uwzględniano faktu, że podczas pierwszego etapu ładowania na diodzie jest niezerowe napięcie. Zaskoczeniem był stosunkowo wysoki stopień trudności ($WT = 2{,}44$) zadania 554 (zsuwanie się pierścienia z gumowego kabla), gdzie w kilku rozwiązaniach nie uwzględniono w bilansie energetycznym zmiany energii sprężystości kabla rozciąganego podczas ruchu pierścienia.

Na szczególne uznanie zasługuje sposób prezentacji rozumowań przez Tomasza Wietechę, który przysłał propozycje rozwiązań wszystkich zadań, konkurując w poszczególnych seriach o palmę pierwszeństwa z Andrzejem Idzikiem i Michałem Koźlikiem.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2014

Zadania z matematyki nr 675, 676

Redaguje Marcin E. KUCZMA

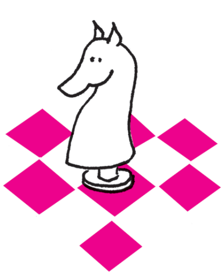
675. Alfabet liczy 24 litery; dwie z nich to alfa oraz omega. Spośród wszystkich słów (ciągów liter) długości n wybieramy losowo jedno. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną n, dla której bardziej prawdopodobne jest wylosowanie słowa, w którym litery alfa i omega co najmniej raz sąsiadują, niż słowa bez tej własności.

676. W trójkącie o bokach długości a, b, c, o wszystkich kątach wewnętrznych mniejszych od 120°, znajduje się punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest minimalna i wynosi d. Dowieść, że zachodzi równość $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)$.

Zadanie 676 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2013

Przypominamy treść zadań:



667. Kwadratowa plansza o rozmiarach $n \times n$ ma pola pokolorowane jak szachownica; n jest ustaloną liczbą parzystą. Wykonujemy ciąg ruchów. W każdym ruchu wybieramy dowolny prostokąt, złożony z pól planszy, i zmieniamy kolory wszystkich pól w obrębie tego prostokąta (białe na czarne, czarne na białe). Wyznaczyć najmniejszą liczbę ruchów wystarczającą, by wszystkie pola planszy uzyskały jednakowy kolor.

668. Czy istnieje podzbiór właściwy zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są działania mnożenia i dzielenia, nie zawierający się w żadnym innym podzbiorze właściwym zbioru liczb wymiernych dodatnich, w którym wykonalne są powyższe działania?

667. Rozważamy pola brzegowe (przylegające co najmniej jednym bokiem do brzegu szachownicy). Zliczamy pary sąsiadujących pól brzegowych, mających różne kolory. Na starcie liczba takich par wynosi $4(n-1)$; w stanie docelowym wynosi 0. Jeden ruch może zmniejszyć liczbę takich par co najwyżej o 4. Zatem liczba ruchów, po których plansza może stać się jednokolorowa, jest nie mniejsza niż $n-1$.

Pola narożne mają na starcie różne kolory, więc w którymś ruchu musimy użyć prostokąta, zawierającego jakieś pole narożne. Wszelako taki ruch zmniejszy rozważaną wielkość co najwyżej o 2. W takim razie $n-1$ ruchów nie wystarczy do uzyskania żądanego celu, potrzeba co najmniej n ruchów.

Pozostaje zauważyć, że n ruchów faktycznie już wystarczy: w początkowych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugim wierszu, wszystkie kolumny stają się jednokolorowe (plansza „w zebrę”). W kolejnych $n/2$ ruchach zmieniamy kolory w co drugiej kolumnie i gotowe.

668. *Maksymalna podgrupa właściwa grupy multiplikatywnej liczb wymiernych dodatnich* – tak się w języku algebry nazywa obiekt, którego istnienie należy rozstrzygnąć. Podamy przykład takiej podgrupy. Każda liczba $q \in \mathbb{Q}^+$ (wymierna dodatnia) daje się przedstawić w postaci

$$q = 2^k \cdot \frac{\ell}{m}; \quad k, \ell, m \text{ całkowite; } \ell, m > 0 \text{ nieparzyste;} \tag{1}$$

wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Określamy zbiór G, zaliczając doń te liczby powyższej postaci, które mają wykładnik k parzysty. Nie wszystkie liczby $q \in \mathbb{Q}^+$ się tu znalazły, więc G jest podzbiorem właściwym zbioru $\mathbb{Q}^+$. Jest on zamknięty względem działań mnożenia i dzielenia (tworzy podgrupę grupy $\mathbb{Q}^+$) – to jasne. Trzeba jeszcze wykazać, że jeżeli $\widetilde{G}$ jest podgrupą grupy $\mathbb{Q}^+$, zawierającą G i nie identyczną z G, to $\widetilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

Wybierzmy więc i ustalmy dowolny element $q_0 \in \widetilde{G} \setminus G$. Jest to liczba postaci (1):

$$q_0 = 2^{k_0} \cdot \frac{\ell_0}{m_0}; \quad \ell_0, m_0 > 0 \text{ nieparzyste,}$$

przy czym wykładnik k_0 jest nieparzysty. Wszystkie iloczyny $q_0 q$, gdzie $q \in G$, należą do $\widetilde{G}$. Pisząc q w postaci (1), z parzystym k, mamy

$$q_0 q = 2^{k_0+k} \cdot \frac{\ell_0 \ell}{m_0 m}. \tag{2}$$

Gdy k przebiega zbiór wszystkich liczb parzystych, $k_0 + k$ przebiega zbiór wszystkich liczb nieparzystych. Ponadto każdy ułamek L/M o liczniku i mianowniku dodatnim nieparzystym możemy uzyskać jako drugi czynnik przedstawienia (2), biorąc $\ell = Lm_0$, $m = M\ell_0$.

To znaczy, że w zbiorze $\widetilde{G}$ znajdują się wszystkie liczby wymierne dodatnie z nieparzystą potęgą dwójki. Liczby z parzystą potęgą dwójki, czyli elementy zbioru G, też się w $\widetilde{G}$ znajdują. Zatem, istotnie, $\widetilde{G} = \mathbb{Q}^+$.

[Nieco ogólniej, można było wziąć dowolne liczby pierwsze p, p' (różne lub nie) i określić G jako zbiór wszystkich ułamków $p^k \cdot \ell/m$, gdzie $\ell, m > 0$ są niepodzielne przez p, zaś wykładnik $k \in \mathbb{Z}$ jest podzielny przez p'; takie ułamki również tworzą maksymalną podgrupę właściwą (w podanym przykładzie przyjęliśmy $p = p' = 2$).]

* * *

Odnotujmy małe odświeżenie w *Regulaminie*: rozwiązania zadań oraz wszelką korespondencję w sprawach ligi można przysyłać, jak dotychczas, pocztą tradycyjną (do czego zachęcamy); można też pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (co zresztą część uczestników już od jakiegoś czasu robi, *Regulamin* zaś goni życie; wprowadzony retusz jedynie afirmuje istniejący stan rzeczy).

* * *

Geometria w lidze coś słaba. Gdy przejrzeć zadania z kilkunastu niedawnych numerów (oraz ich rozwiązania), rzuci się w oczy, że te geometryczne przedziwnie łatwe. W czym rzecz? Nieodżałowany trener Kazimierz Górski zwykł mawiać: tak się gra, jak przeciwnik pozwala.

Otóż wydaje się, że upodobania geometryczne u regularnych uczestników ligi znajdują się na dalszym planie. Regularnych – kto to? Grono uczestników,

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2012/13

Rami Marcin Ayoush	–	41,55
Adam Dzedzej	–	1–40,33
Marek Spychała	–	1–39,37
Janusz Fiett	–	38,75
Andrzej Idzik	–	1–37,70
Marcin Małogrosz	–	37,48
Wojciech Maciak	–	36,72
Zbigniew Sewartowski	–	1–35,45
Jędrzej Garnek	–	1–32,90
Tomasz Kochanek	–	32,40
Grzegorz Karpowicz	–	1–31,51
Janusz Olszewski	–	14–27,53
Jerzy Witkowski	–	5–27,02
Paweł Duch	–	26,60
Tomasz Wietecha	–	9–26,56
Michał Koźlik	–	26,46
Stanisław Bednarek	–	25,92
Franciszek Salezy Sikorski	–	1–24,69
Michał Miodek	–	1–24,39
Wojciech Tobiś	–	21,08
Bartłomiej Dyda	–	5–20,18
Janusz Wojtal	–	16,17

Legenda (przykładowo): stan konta 9–26,56 oznacza, że uczestnik już dziewięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziesiątej) rundzie ma 26,56 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 15 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2011, 2012 lub 2013.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (14), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (9), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (5), J. Cisło (10), W. Bednarek (6), D. Kurpiel, P. Najman (6), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”:
Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, K. Kamiński, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, Z. Skalik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”:
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, J. Garnek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, M. Miodek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, R. Słowik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

rzecz jasna, ewoluuje – jedni z wolna wycofują się z zabawy, nowi dochodzą, ale istnieje wyraźny trzon sympatycznego grona tych, którzy są z nami stale, od dość dawna lub od bardzo dawna (maksimum stażu wynosi tyle, co wiek ligi) i nie wydają się znużeni. I widać, że w większości czują się zdecydowanie lepiej w tematyce niegeometrycznej.

W każdym numerze jedno zadanie pochodzi z nadsyłanych propozycji. Algebra i analiza są tam reprezentowane bardzo mocno; liczby całkowite i szeroko rozumiana kombinatoryka – też nie najgorzej. Okręgów, trójkątów, przekształceń płaszczyzny – raczej nie widać. Te zadania musi wyszukiwać redaktor ligi. Gdy więc decyduje się zamieścić jedno z proponowanych zadań algebraicznych, ono zaś sprawia wrażenie rzetelnie trudnego, trzeba je dopełnić do pary zadaniem znacznie łatwiejszym, no i z odmiennej tematyki. Korelacja: [geometria $\leftrightarrow$ łatwa] staje się nieunikniona…

Popatrzmy niżej. Do corocznego przeglądu zostały wybrane zadania ciekawsze i trudniejsze (zręczne rozwiązania, znaczące uogólnienia, wysoki współczynnik trudności, niewielka liczba rozwiązań). Są tu wyłącznie zadania o numerach parzystych, a więc proponowane przez Czytelników – i jest to prawie wyłącznie algebra z analizą (zadanie 658, mimo formalnie geometrycznej treści, to też czysta algebra).

Zadanie **648** [$F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \Rightarrow$ ciąg $(F_{n+2}^{1/n})$ jest malejący] ($WT = 2{,}68$; $LPR = 7$). Dla rutyniarzy (**J. Cisło**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**, **W. Bednarek**, **K. Kamiński**, a także redaktor ligi w rozwiązaniu firmowym) było jasne, że należy użyć wzoru Bineta

$$\varphi = (\sqrt{5}+1)/2, \qquad F_n = (\varphi^n - (-\varphi)^{-n})/\sqrt{5},$$

i dalej prowadzić stosowne szacowania, stopniowo redukując tezę zadania – mniej lub bardziej zręcznie – do prostszych nierówności. To teraz popatrzmy, jak na tym tle wygląda rozwiązanie, które przysłała **Karolina Cynk**, uczennica liceum (niestety praca otrzymała ocenę nieco niższą od maksymalnej, z powodu usterki, o której niżej).

Dowodzona nierówność

$$(1) \qquad F_{n+2}^{n+1} > F_{n+3}^{n}$$

wynika dla n nieparzystych wprost stąd, że $F_{n+2} > \varphi^{n+2}/\sqrt{5}$, $F_{n+3} < \varphi^{n+3}/\sqrt{5}$. Ciekawy moment następuje teraz: dla n parzystych Autorka rezygnuje z Bineta i dowodzi (1) przez indukcję ze skokiem 2, startując od $n = 2$ ($F_4^3 = 27 > F_5^2 = 25$); dla parzystego $n > 2$ zakłada indukcyjnie, że $F_n^{n-1} > F_{n+1}^{n-2}$, po czym korzysta (tu jest istota pomysłu!) z dwóch nierówności pomocniczych:

$$(2) \qquad F_{n+1}F_{n+2} > F_nF_{n+3} \quad \text{oraz} \quad F_{n+2}^3 > F_nF_{n+3}^2$$

– wystarczy podnieść pierwszą z nich do potęgi $n-2$, pomnożyć przez drugą i przez tę z założenia indukcyjnego, by dostać tezę (1). Pierwsza nierówność (2) jest znana i łatwa (lewa strona jest o 1 większa od prawej); drugą można zaś uzasadnić na przykład tak:

$$\begin{aligned} F_{n+2}^3 - F_nF_{n+3}^2 &= \\ &= F_{n+2}^3 - (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1})^2 = \\ &= F_{n+1}^3 - F_{n+2}F_{n+1}(F_{n+2} - F_{n+1}) = \\ &= F_{n+1}(F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}) = F_{n+1} \end{aligned}$$

(różnica w ostatnim nawiasie ma wartość 1, wobec parzystości n); w tym fragmencie była w pracy pomyłka – po jej poprawieniu rozumowanie przebija prostotą wszystkie pozostałe!

Tomasz Wietecha wykazał nierówność (1) w obu przypadkach indukcyjnie, co jednak dla n nieparzystych okazało się bardziej uciążliwe niż skorzystanie ze wzoru Bineta.

Interesującą interpretację kombinatoryczną tezy zadania wskazał **Jerzy Cisło**: rozważamy macierze zero-jedynkowe o rozmiarach: n wierszy, $n+1$ kolumn. Lewa i prawa strona nierówności (1) – to odpowiednio liczba takich macierzy, w których nie ma dwóch jedynek jedna tuż nad drugą oraz liczba takich, gdzie nie ma dwóch jedynek jedna obok drugiej. W takiej macierzy jest mniej par klatek sąsiadujących pionowo niż par sąsiadujących poziomo, dlatego pierwszy z tych warunków jest „łatwiejszy” do spełnienia niż drugi. To przekonująca *agitacja* za słusznością tezy (1)… ale *wykazać* jej słuszność – to to samo, co zrobić zadanie.

Zadanie **650** [Ile maksymalnie wież można ustawić na szachownicy $n \times n$, by wśród dowolnych k wież były dwie, które się atakują?] ($WT = 2{,}51$; $LPR = 10$). Łatwo ustawić $n(k-1)$ wież; wystarczy zapełnić nimi prostokąt $n \times (k-1)$. Więcej się nie da – chyba wszyscy rozwiązujący pokazali to prościej, niż rozwiązanie firmowe. Szczególnie urzekło nas takie oto, banalnie proste, rozumowanie (**J. Garnek**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**): w pola pierwszego wiersza planszy wpisujemy kolejno liczby $[1, \ldots, n]$; w pola drugiego wiersza: $[2, \ldots, n, 1]$; i tak dalej, cyklicznie; ostatni wiersz: $[n, 1, \ldots, n-1]$; gdy na planszy postawimy więcej niż $n(k-1)$ wież, to dla pewnego $r \in \{1, \ldots, n\}$ w polach z wpisaną liczbą r znajdzie się więcej niż $k-1$ wież; a więc co najmniej k wież; i żadne dwie z nich nie atakują się wzajemnie!

Zadanie **652** [$a, b, c > 0,\ n \geqslant 1 \Rightarrow \sum \frac{a^{n+1}}{a+b} \geqslant \sum \frac{a^n}{2}$] ($WT = 2{,}45$; $LPR = 13$). Użyte oznaczenie – to *sumy cykliczne* (na przykład lewą stronę nierówności należy odczytać jako $\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a}$).

Rozwiązanie, które zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (wydrukowane jako firmowe) wydało się prowadzącemu ligę tak trikowe, że zakwalifikował zadanie jako trudne. Jednakże – robione inną metodą – wcale się takim nie okazało, o czym świadczy spora liczba dobrych prac. We wszystkich (prawie) tych pracach istotne jest spostrzeżenie, że trójki (a, b, c), $(a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1})$ są jednakowo uporządkowane, więc w myśl twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych:

$$\sum a^n \geqslant \sum a^{n-1}b.$$

Rozumowanie, które z wykorzystaniem tego spostrzeżenia prowadzi do tezy zadania, było w każdej pracy inne (nierówności między średnimi, wypukłość, pochodne; rozbicie na przypadki lub nie). Redaktor ligi wybrał po jednym pomyśle z kilku przeczytanych prac i teraz może z ich użyciem zaproponować takie rozwiązanie: dzięki łatwej do sprawdzenia nierówności $\frac{a(a-b)}{a+b} \geqslant \frac{a-b}{2}$ dla $a, b > 0$, jeśli L i P oznaczają lewą i prawą stronę nierówności danej do udowodnienia, to

$$L - P = \sum\left(\frac{a^{n+1}}{a+b} - \frac{a^n}{2}\right) = \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a(a-b)}{a+b} \geqslant$$
$$\geqslant \sum \frac{a^{n-1}}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{1}{4}\Big(\sum a^n - \sum a^{n-1}b\Big) \geqslant 0$$

i gotowe. Rachunek w takiej dokładnie postaci nie pojawił się w żadnej pojedynczej pracy uczestnika – to emanacja mądrości zbiorowej.

A zmyślne rozwiązanie firmowe – czy ktoś znalazł? Ależ tak: **Janusz Olszewski**.

Zadanie **658** [Czworościan foremny o krawędzi a; punkt P w odległościach $d_1, \ldots, d_4$ od wierzchołków $\Rightarrow$ $(a^2 + \sum {d_i}^2)^2 = 4(a^4 + \sum {d_i}^4)$] ($WT = 1{,}81$; $LPR = 11$). Pan **Tomasz Ordowski** przysłał to zadanie wraz z rozwiązaniem, zaznaczając, że autorem rozwiązania jest **Jerzy Cisło**. Zostało ono zamieszczone jako firmowe w numerze 7/2013. Przypomnijmy, że dowód polegał na umieszczeniu czworościanu w przestrzeni $\mathbb{R}^4$, z wierzchołkami na osiach, wzięciu punktu P, leżącego w jednej trójwymiarowej hiperpłaszczyźnie z owymi wierzchołkami, i rachowaniu na jego współrzędnych; przy takim ujęciu rachunki mocno zyskują na prostocie (rachunki w pracach uczestników ligi nie wychodziły poza $\mathbb{R}^3$ i już nie były tak proste…).

Autor rozwiązania zauważył, że przenosi się ono na $(n-1)$-wymiarowy sympleks foremny o krawędzi a w przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$ i dowolny punkt $P \in \mathbb{R}^{n-1}$ w odległościach $d_1, \ldots, d_n$ od wierzchołków; wystarczy umieścić sympleks w $\mathbb{R}^n$, z wierzchołkami na osiach, by dokładnie takim samym rachunkiem uzyskać wzór

$$(3) \qquad (a^2 + d_1^2 + \ldots + d_n^2)^2 = n(a^4 + d_1^4 + \ldots + d_n^4)$$

(obaj wymienieni autorzy wspólnie zajmowali się tym zagadnieniem jeszcze przed zaproponowaniem go jako zadania dla ligi).

Autor zadania wskazał nieco szerszy kontekst: n-wymiarowa objętość V_n sympleksu n-wymiarowego o wierzchołkach $A_1, \ldots, A_{n+1}$ jest dana znanym wzorem $V_n^2 = c_n \det M$, gdzie M jest macierzą $(n+2)\times(n+2)$, w postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & K \end{bmatrix},$$

K to macierz $(n+1)\times(n+1)$ o wyrazach $|A_iA_j|^2$, $J = [1, \ldots, 1]$, zaś $c_n = (-1)^{n+1}2^{-n}(n!)^{-2}$. Gdy punkty $A_1, \ldots, A_{n+1}$ leżą w jednej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie, sympleks (zdegenerowany) ma objętość zerową ($\det M = 0$); gdy ponadto punkty $A_1, \ldots, A_n$ są wierzchołkami $(n-1)$-wymiarowego sympleksu *foremnego*, a punkt $A_{n+1} = P$ leży w jego hiperpłaszczyźnie, w odległościach d_i od wierzchołków, równanie $\det M = 0$ prowadzi do wzoru (3).

Wyprowadzenie wzoru $V_n^2 = c_n \det M$ (tzw. wyznacznik Cayleya–Mengera) można znaleźć na przykład pod `www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm`; dla $n = 3$ także w artykule *Siatka czworościanu* w numerze 9/2013 (przyp. redaktora ligi, który z niemałym zaciekawieniem wyczytał w zacytowanym materiale internetowym, że wzór ów dla $n = 3$ odkrył renesansowy malarz Piero della Francesca) (!).

Zadanie **662** [$x_0 > 0$; $x_{n+1} = x_n^2/(\mathrm{e}^{x_n} - 1)$; $q_n = n(2 - nx_n)/\ln n$; $\lim q_n = ?$] ($WT = 2{,}84$; $LPR = 5$). Ten sam ciąg (x_n) był przedmiotem wcześniejszego zadania **654**, w którym należało obliczyć granicę $\lim nx_n$; wynik 2. Zatem ciąg $(2 - nx_n)$ dąży do zera; ale jak szybko? odpowiedź daje obliczenie granicy $\lim q_n = 4/3$; tak więc $2 - nx_n = O(\ln n/n)$. Kluczem do obliczenia był wzór Stolza – korzystali z niego wszyscy, którzy zadanie zrobili, a także rozwiązanie firmowe.

Paweł Najman proponował oba te obliczenia ($\lim nx_n = ?$; $\lim q_n = ?$) jako jedno zadanie. Rozbicie na dwa zadania to już pomysł redaktora ligi. Rzecz w tym, że wzór Stolza jest dobrze znany zawodowym matematykom oraz studentom matematyki, ale niekoniecznie studentom innych kierunków oraz pozostałym Czytelnikom.

Granicę $\lim nx_n = 2$ można było wyznaczyć różnymi sposobami; zadanie 654 rozwiązało kilkanaście osób. Tam też *można było* użyć wzoru Stolza – i został on użyty w rozwiązaniu firmowym, wydrukowanym w tym samym numerze, co treść zadania 662 – właśnie po to, by obliczenie granicy ciągu (q_n) znalazło się w zasięgu szerszego grona uczestników ligi; by dać wszystkim oręż do ręki. Wystarczyło przed zaatakowaniem zadania 662 starannie zapoznać się z rozwiązaniem zadania 654, gdzie wzór Stolza został dokładnie sformułowany, a jego stosowanie – wyjaśnione. Mimo tak wyrazistej wskazówki, tylko pięciu uczestników uporało się z tym: **J. Garnek**, **K. Kamiński**, **M. Małogrosz**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**.