Procedura negatywna przeszukuje więc wszystkie skończone zbiory wektorów $\{v^1, \ldots, v^j\}$ i sprawdza, czy zbiór wszystkich wektorów większych od któregoś z nich nie jest separatorem. Z podanych powyżej trzech warunków drugi jest spełniony zawsze. Pierwszy sprawdza się łatwo, wystarczy porównać współrzędne wektorów v_p, v_k i wektorów reprezentujących separator. Trzeci również można rozstrzygać w miarę nietrudno – Czytelnik Ambitny może śmiało spróbować to udowodnić.

Tym samym zakończyliśmy opis obu procedur, a więc i algorytmu. Najistotniejszym spostrzeżeniem było, że elementów minimalnych w separatorze jest skończenie wiele. To typowa sytuacja: kluczem do zaprojektowania algorytmu, który zawsze się zatrzymuje, ale, być może, działa bardzo wolno, jest obserwacja, że pewien obiekt pojawiający się w analizie problemu jest skończony. Do otrzymywania takich wyników nadaje się znakomicie lemat Dicksona lub następujący lemat Higmana, stosowany w przypadku słów, a nie wektorów.

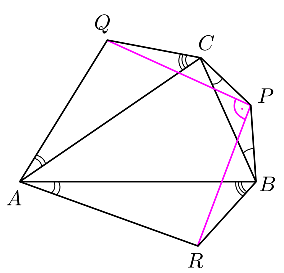
Lemat 2 (Higmana). *Niech $w^1, w^2, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem słów nad skończonym alfabetem. Wówczas istnieją takie indeksy $i < j$, że słowo w^i zawiera się w słowie w^j (czyli ciąg liter słowa w^i jest podciągiem ciągu liter słowa w^j).*

Na pierwszy rzut oka widać podobieństwo do lematu Dicksona. Tak naprawdę oba te lematy są szczególnymi przypadkami pewnych bardziej ogólnych twierdzeń. To już jednak temat na zupełnie inną opowieść.

Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1408. Udowodnić, że dowolna liczba rzeczywista x spełnia nierówność
$$|x+1| + |x+2| + \ldots + |x+2014| \geqslant 1007^2.$$
Rozwiązanie na str. 5

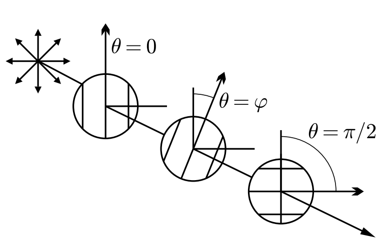


Rys. 1

M 1409. Na zewnątrz trójkąta ABC dane są punkty P, Q, R (rys. 1) wyznaczone przez warunki
$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle CBP = 15^\circ, \quad \sphericalangle BAR = \sphericalangle CAQ = 30^\circ, \quad \sphericalangle ABR = \sphericalangle ACQ = 45^\circ.$$
Udowodnić, że odcinki PQ i PR są równe i prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 10

M 1410. Rozpatrujemy takie ciągi $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, że $a_1 = 1$ oraz, dla każdego $n \geqslant 2$,
$$a_n = a_1^{\pm 1} + \ldots + a_{n-1}^{\pm 1}$$
dla pewnego wyboru znaków $+$, $-$ w wykładnikach. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość a_{2014}.
Rozwiązanie na str. 6

Przygotowali Michał NAWROCKI i Andrzej MAJHOFER



Rys. 2

F 847. Jak wiadomo, niespolaryzowane światło nie przechodzi przez układ dwóch skrzyżowanych pod kątem prostym polaryzatorów liniowych. Jeżeli jednak pomiędzy te polaryzatory wstawimy pod odpowiednim kątem trzeci polaryzator liniowy (rys. 2), to światło nie będzie wygaszane. Przyjmijmy, że oś polaryzacji wstawionego polaryzatora tworzy kąt φ z osią pierwszego polaryzatora. Jak zależy natężenie światła przechodzącego przez taki układ polaryzatorów od kata φ? Dla jakiego kąta φ będzie ono największe, a dla jakiego najmniejsze?
Rozwiązanie na str. 11

F 848. Przy jakiej wartości α kąta nachylenia drogi do poziomu długość drogi hamowania zjeżdżającego samochodu rośnie ponad dwukrotnie w porównaniu z hamowaniem na odcinku poziomym? Przyjmujemy, że współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi f.
Rozwiązanie na str. 7