Konfiguracje Ziemia–Wenus w „boskiej proporcji”

Lech FALANDYSZ

Tak zwana boska proporcja, inaczej złoty podział, to znany od starożytności specjalny sposób podziału odcinka. Dla odcinka o długości równej 1 stosunek większej części o długości x do $1-x$ jest równy stosunkowi $1/x$,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} =: \varphi \;\rightarrow\; x^2 + x - 1 = 0.$$

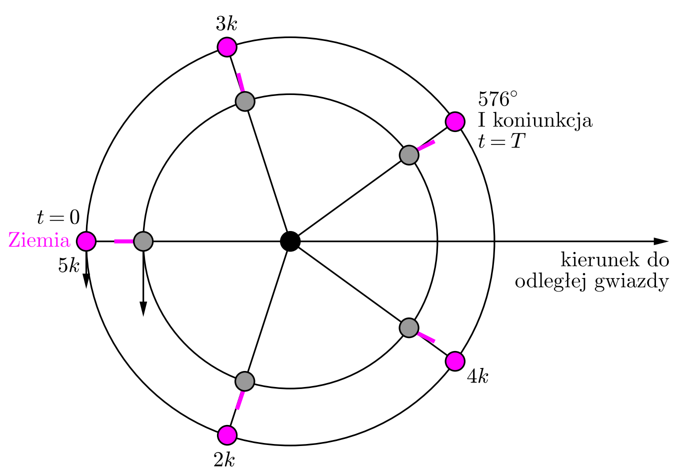
Dodatni pierwiastek tego równania to $(\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}618033989\ldots$, stąd $\varphi = (\sqrt{5}+1)/2 = 1{,}618033989\ldots$. Oznacza to, że część o długości x stanowi około 0,618 z długości całego odcinka (jak również, część o długości $1-x$ to około 0,618 długości x). Walory złotego podziału docenia się od dawna w sztuce: rzeźbie, malarstwie i architekturze, ponieważ tworzy on miłe dla oka wrażenie harmonii pomiędzy elementami całości budynku, rzeźby lub obrazu. Złoty podział jest wszechobecny w przyrodzie: w rozmieszczeniu gałązek i liści wielu roślin, kształcie muszli itd. Postać wyprostowanego człowieka również dzieli się na części według złotej proporcji. W matematyce φ pojawia się w figurach foremnych: pięciokącie, dziesięciokącie, dwunastościanie i dwudziestościanie, a także spirali logarytmicznej, w ciągu Fibonacciego i innych obiektach matematycznych.

Zajmiemy się teraz analizą ruchów Ziemi i Wenus w heliocentrycznym układzie odniesienia. Wyniki będą przybliżone, ponieważ zakładamy, że orbity planet są okręgami i leżą w jednej płaszczyźnie. Przyjmijmy, że średnia odległość Wenus–Słońce wynosi $R_w = 0{,}723$ AU (jednostki astronomicznej, czyli średniej odległości Ziemia–Słońce, $R_z = 1$ AU). Z trzeciego prawa Keplera w postaci uogólnionej, $R^3/T^2 = G(M_\odot + m)/(4\pi^2)$ dostajemy, przy założeniu równości mas planet oraz $m \ll M_\odot$, stosunek ich okresów orbitalnych $T_w/T_z = (R_w/R_z)^{3/2} \simeq 0{,}615$, czyli wartość bliską $\varphi - 1$. Konfiguracje pojawiające się w tym układzie odzwierciedlają więc przybliżony złoty podział – w tym przypadku związaną z częstością ruchu planet „muzyczną harmonię”. Jeśli zaś chodzi o odległości geometryczne, rysunek 1 przedstawia Wenus w koniunkcji dolnej. Na powierzchni Wenus zaznaczona jest fikcyjna wieżyczka skierowana w tym momencie ku Ziemi. Następna koniunkcja Wenus nastąpi po czasie T zwanym okresem synodycznym Wenus. Do obliczenia tego okresu przyjmijmy wyliczone powyżej wartości:

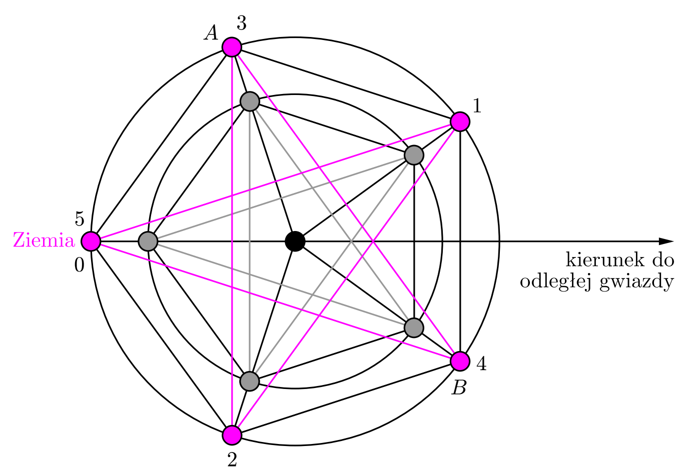
Sytuację, w której Wenus, Ziemia i Słońce są w jednej linii, nazywamy koniunkcją. Gdy Wenus i Ziemia są po tej samej stronie Słońca, jest to koniunkcja dolna.

$$T = \frac{T_z T_w}{T_z - T_w} = 1{,}60 \text{ roku ziemskiego} = 584 \text{ dób ziemskich.}$$

W tym okresie promienie wodzące planet zakreślą kąty: dla Ziemi 576°, a dla Wenus 936°. Wenus znajdzie się w koniunkcji dolnej oznaczonej I. Kolejne koniunkcje dolne zaznaczone są na rysunku 1 w regularnych odstępach. Piąta koniunkcja jest powtórzeniem konfiguracji początkowej. Czas $5T$ jest



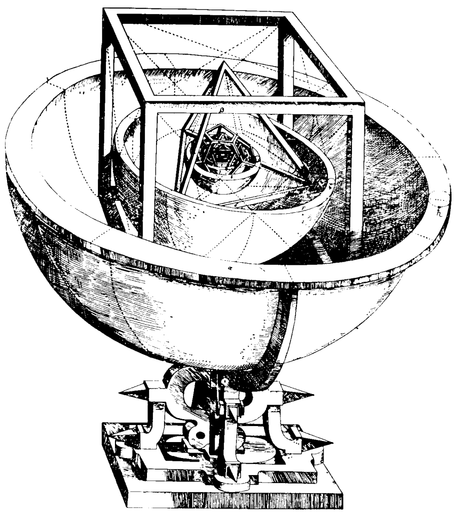
Rys. 1. Cykl pięciu koniunkcji



Rys. 2

Kepler dwukrotnie odnalazł prawidłowości w układzie planet. Za pierwszym razem jego pomysł opierał się na spostrzeżeniu, że jest pięć planet, czyli ruchomych gwiazd, widocznych gołym okiem, a więc tyle samo, ile wielościanów foremnych.

Sprawdził zatem, że te dwie piątki można skojarzyć, rysując sfery o środku w Słońcu: gdy na sferze, na której leży orbita Merkurego, opiszemy ośmiościan foremny, to będzie on wpisany w sferę, na której leży orbita Wenus. Opisany na niej z kolei dwudziestościan będzie wpisany w sferę z orbitą Ziemi. Dwunastościan opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą Marsa, a czworościan opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą Jowisza. I sześcian opisany na niej będzie wpisany w sferę z orbitą Saturna.

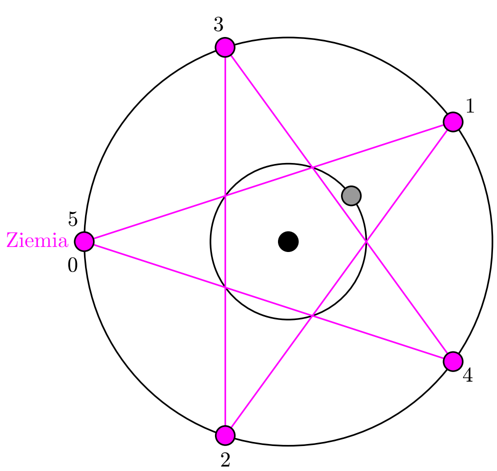


To nawet ładnie wygląda. Zachwycony jego obliczeniami Tycho Brahe uczynił go nawet z tego powodu swoim następcą na dworze cesarza Rudolfa II. Ale sam Kepler widział, że – choć opisana wyżej konstrukcja jest z drobnymi uproszczeniami poprawna – nie można z tego wyciągnąć żadnego wniosku przydatnego przy przewidywaniu zjawisk na niebie.

Dlatego też poszukał innych prawidłowości. I tak powstały prawa Keplera, które głoszą, iż planety poruszają się po orbitach eliptycznych, w których ognisku jest Słońce, a promień wodzący każdej z nich zamiata w równych odstępach czasu równe pola. Co więcej, między ruchem różnych planet jest zachowany związek mówiący, że stosunek sześcianu ich średniej odległości od Słońca do kwadratu czasu pełnego obiegu jest dla każdej z nich taki sam.

Newton wykazał, że z tych praw na gruncie jego praw dynamiki wynika powszechne ciążenie, a z powszechnego ciążenia – prawa Keplera. Dlatego uznajemy te prawa za prawa nauki, a nie przypadkową koincydencję faktów.

Redakcja



Rys. 3

okresem powtarzalności konfiguracji tych trzech ciał w przestrzeni. W czasie $5T$ Ziemia wykonuje wokół Słońca 8 pełnych obiegów, a Wenus 13. Rotacja Wenus wokół własnej osi odbywa się w kierunku wstecznym niż rotacja większości planet i wynosi około 243 dób ziemskich. Oznacza to, że w ciągu jednego dnia ziemskiego Wenus obraca się o kąt 1,481°. Po pierwszym okresie T kąt, o jaki obróciła się Wenus, wynosi więc $584 \cdot 1{,}481° \equiv 865° = 2 \cdot 360° + 145°$.

Przy każdej koniunkcji dolnej Wenus zwrócona jest do Ziemi tym samym miejscem na jej powierzchni (wieżyczką ku Ziemi). Z powodu bardzo powolnej rotacji doba na Wenus, tzn. odstęp czasu pomiędzy kolejnymi wschodami Słońca, wynosi 116,8 dób ziemskich. Wynika stąd, że pomiędzy koniunkcjami upływa $584/116{,}8 = 5{,}00$ dób wenusjańskich. Miejsca koniunkcji Wenus na jej orbicie znajdują się w wierzchołkach pięciokąta foremnego (rys. 2). Łącząc odcinkami kolejne pozycje planety podczas koniunkcji, otrzymujemy dla czasu $5T$ pentagramy: jeden dotyczący ruchu Ziemi, a drugi Wenus. Punkty przecięcia przekątnych pięciokąta wyznacza ich złoty podział: $CD/CA = CA/AD = 0{,}618$ oraz $AB/BD = BD/AD = 0{,}618$. Odkryliśmy więc kolejną harmonię w ruchach Ziemi i Wenus wokół Słońca. „Boska proporcja” przejawia się w okresach obiegu tych planet (0,615) oraz w geometrii dotyczącej koniunkcji Wenus (0,618). Na rysunku 3 przedstawiony jest dodatkowo ziemski pentagram z rysunku 2. Jego przecinające się ramiona tworzą w środkowej części pięciokąt foremny. Okrąg opisany na nim ma promień niemalże równy średniej odległości Merkurego od Słońca. W rzeczywistości półosie eliptycznej orbity Merkurego wyraźnie odbiegają od średniej odległości, podobnie jest w przypadku Plutona (mimośrody ich orbit mają wartości ponad 0,2).

Wiara w istnienie porządku w rozmieszczeniu i ruchach planet jest dla wielu uczonych inspiracją do ich poszukiwań. W XVII w. Johannes Kepler sformułował prawa dotyczące ruchu planet, a XVIII-wieczny astronom Johann Titius z Wittenbergi podał matematyczną regułę, według której rozmieszczone miały być planety. Wkrótce później regułę tę rozpowszechnił Johann Bode. Reguła Titiusa–Bodego umożliwia w prosty sposób obliczenie przybliżonych średnich odległości planet od Słońca. Odległość ta to $0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ AU, gdzie n, począwszy od Merkurego, wynosi $n = -\infty, 0, 1, 2, 3, \ldots$. Mimo zaskakująco dobrej zgodności dla większości planet reguła ta nie wynika wprost z równań mechaniki nieba, może za to być traktowana jako wygodne „pierwsze przybliżenie”.

Przedstawione wyżej obliczenia traktuję jako ciekawostkę, która daje mi poczucie, że ruchami ciał niebieskich rządzą prawa o walorach estetycznych (muzyka sfer?). Przyczyną tych prawidłowości są, jak obecnie wiemy, wzajemne oddziaływania w układzie Słońce–najbliższe planety, w szczególności występowania rezonansów pomiędzy składnikami układu. Dlaczego pojawił się tu złoty podział? Tego nie wiem, zachęcam jednak do własnych badań w poszukiwaniu nowych prawidłowości.