Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 570, 571

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

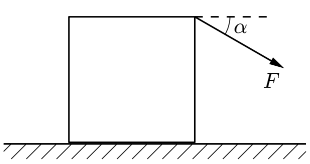
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2014

570. Pręt o długości l, promieniu r i masie m porusza się wewnątrz pionowej rury o promieniu $R \ll l$, wypełnionej nieściśliwą cieczą o gęstości ρ, wzdłuż jej osi. Gęstość pręta jest mniejsza od gęstości cieczy. Znaleźć przyspieszenie pręta. Opory ruchu (lepkość cieczy) można zaniedbać.

571. W pionowej, wąskiej rurce o długości $2l$ dolny koniec jest zamknięty, a górny otwarty. W dolnej połowie znajduje się gaz doskonały o temperaturze T_1, górna połowa jest wypełniona rtęcią. Ciśnienie zewnętrzne jest równe ciśnieniu słupka rtęci o wysokości l. Do jakiej temperatury wystarczy ogrzać gaz w rurce, aby cała rtęć została z niej wyparta?

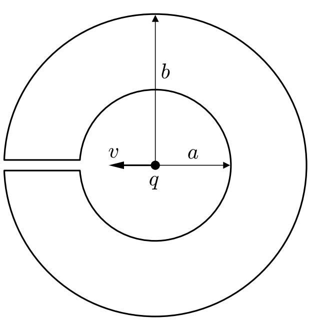
Rozwiązania zadań z numeru 9/2013

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1

562. Sześcian o masie m stoi na powierzchni poziomej. Z jaką minimalną siłą F i pod jakim kątem α do poziomu (rys. 1) należy ciągnąć sześcian za środek górnej krawędzi, żeby przewrócił się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ? Siła F jest prostopadła do górnej krawędzi sześcianu.



Rys. 2

563. W środku nieruchomej, wydrążonej, przewodzącej kuli o promieniach wewnętrznym a i zewnętrznym b umieszczono cząstkę o masie m naładowaną ładunkiem $q > 0$ (rys. 2). Jaką prędkość należy nadać cząstce, aby przez wąską szczelinę oddaliła się do nieskończoności? Przenikalność elektryczna próżni ε_0 jest dana.

562. Warunek na brak poślizgu ma postać: $F\cos\alpha \leqslant \mu(mg + F\sin\alpha)$. Aby nastąpił obrót wokół dolnej, przedniej krawędzi, musi być spełniony warunek: $aF\cos\alpha < \frac{mga}{2}$, gdzie a jest krawędzią sześcianu. Rozważmy przypadek graniczny, gdy siła $F = F_0 = \frac{mg}{2\cos\alpha}$ nie powoduje jeszcze obrotu. Z warunku na brak poślizgu otrzymujemy wtedy: $\frac{mg}{2} \leqslant \mu mg\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right)$, czyli $\operatorname{tg}\alpha \geqslant \frac{1-2\mu}{\mu}$.
Musimy rozważyć dwa przypadki:
1) $\mu < 0{,}5$, wtedy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-2\mu}{\mu}$,
2) $\mu \geqslant 0{,}5$, wtedy $\alpha = 0$.
Ostatecznie otrzymujemy odpowiedź:

$$\alpha = 0 \quad \text{i} \quad F > \frac{mg}{2} \qquad \text{dla } \mu \geqslant 0{,}5$$

oraz

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-2\mu}{\mu} \quad \text{i} \quad F > \frac{mg\sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}}{2\mu} \qquad \text{dla } \mu < 0{,}5.$$

563. W chwili początkowej na wewnętrznej powierzchni wydrążonej kuli indukuje się ładunek $-q$, a na powierzchni zewnętrznej q, ponieważ w przewodniku nie ma pola elektrycznego. Energia początkowa układu jest sumą energii kinetycznej cząstki, energii W_1 oddziaływania elektrostatycznego cząstki z ładunkami indukowanymi oraz energii W_2 oddziaływania między ładunkami indukowanymi. $W_1 = kq^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$, gdzie $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $W_2 = \frac{qU}{2}$, gdzie U jest napięciem między sferami o promieniach a i b związanym tylko z ładunkami na sferach. Potencjał sfery wewnętrznej wynosi $V(a) = kq\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) < 0$, potencjał sfery zewnętrznej $V(b) = 0$, $U = -V(a)$. Po oddaleniu się cząstki do nieskończoności energia układu wynosi zero i z zasady zachowania energii otrzymujemy szukaną prędkość:

$$v = q\sqrt{\frac{k(b-a)}{mab}}.$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 663 ($WT = 1{,}92$) i 664 ($WT = 1{,}53$) z numeru 6/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Fiett	Warszawa	38,75
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,70
Marcin Małogrosz	Warszawa	37,48
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72

Zadania z matematyki nr 673, 674

Redaguje Marcin E. KUCZMA

673. Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o 2^{10}, jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

674. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które spełniają układ równań funkcyjnych

$$f(x+1) = f(x) + 1, \qquad f(x^2) = f(x)^2 \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

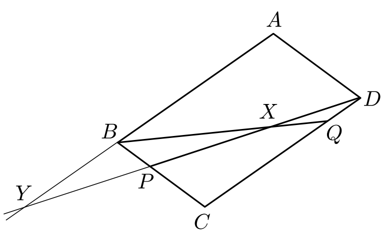
Zadanie 674 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2013

Przypominamy treść zadań:

665. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i DC, odcinki BP i DQ mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki BQ i DP przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta BAD.

666. Niech W będzie wielomianem stopnia $k \geqslant 2$, o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wartość $W(n)$ jest k-tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że W ma postać $W(x) = (ax+b)^k$, gdzie $a \geqslant 1$, $b \geqslant 0$ są liczbami całkowitymi.



665. Niech X będzie punktem przecięcia odcinków BQ i DP. Przedłużamy odcinek DP do przecięcia z prostą AB w punkcie Y. Z równoległości $DC \| AB$ oraz $AD \| BC$ wynikają proporcje

$$\frac{|XY|}{|XD|} = \frac{|BY|}{|QD|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AY|}{|AD|} = \frac{|BY|}{|BP|}.$$

Prawe strony tych równości mają jednakową wartość, bo $|BP| = |QD|$. Zatem i lewe strony mają jednakową wartość; a to znaczy, że w trójkącie DAY odcinek AX jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A (czy go nazwiemy BAD, czy DAY, to wszystko jedno).

666. Niech

$$W(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^k; \qquad c_j \in \mathbb{Z},\ c_j \geqslant 0\ (j = 0, \ldots, k);\ c_k > 0.$$

Z założenia istnieje ciąg liczb całkowitych nieujemnych (d_n) taki, że

$$W(n) = d_n^k \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ciąg $W(n)/n^k$, czyli $(d_n/n)^k$, dąży do c_k, gdy $n \to \infty$. Stąd

$$(1) \qquad \frac{d_n}{n} \to c_k^{1/k}, \quad \text{a także} \quad \frac{d_{n+1}}{n} = \frac{d_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \to c_k^{1/k}, \qquad \text{gdy} \quad n \to \infty.$$

Różnica $W(x+1) - W(x)$ jest wielomianem stopnia $k-1$, z wyrazem wiodącym $kc_k x^{k-1}$. Zatem

$$(2) \qquad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \to kc_k, \qquad \text{gdy } n \to \infty.$$

Z drugiej strony,

$$(3) \qquad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} = \frac{d_{n+1}^k - d_n^k}{n^{k-1}} = (d_{n+1} - d_n) \cdot A_{n,k},$$

gdzie

$$A_{n,k} = \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} d_{n+1}^{k-1-j} d_n^j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n+1}}{n}\right)^{k-1-j} \left(\frac{d_n}{n}\right)^j.$$

Wobec związków (1), przy $n \to \infty$ mamy

$$(4) \qquad A_{n,k} \to \sum_{j=0}^{k-1} c_k^{(k-1-j)/k} c_k^{j/k} = kc_k^{1-1/k}.$$

Z zależności (3), (4), (2) wynika teraz, że przy $n \to \infty$

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{A_{n,k}} \cdot \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \to c_k^{1/k}.$$

Różnica $d_{n+1} - d_n$ przedstawia więc ciąg liczb całkowitych, który jest zbieżny – taki ciąg jest od pewnego miejsca stały. Oznaczając $a = c_k^{1/k}$, mamy zatem

$$d_{n+1} - d_n = a \qquad \text{dla } n \geqslant n_0;$$

liczba a jest całkowita oraz dodatnia.

Dla liczb całkowitych $n \geqslant n_0$ uzyskujemy równość

$$W(n) = d_n^k = (d_{n_0} + (n - n_0)a)^k = (an + b)^k,$$

gdzie $b = d_{n_0} - n_0 a$ jest liczbą całkowitą. Wniosek: W jest wielomianem

$$W(x) = (ax + b)^k;$$

pozostaje tylko zauważyć, że $b \geqslant 0$, skoro (z założenia) współczynniki c_j wielomianu W są nieujemne, zaś $c_0 = b^k$, $c_1 = kab^{k-1}$, $a > 0$.