deltoid 61

Drogi w kratach i kino

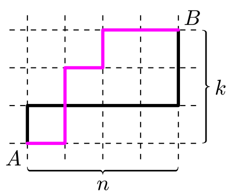
Joanna JASZUŃSKA

1. W Kratkowie ulice prowadzą tylko z północy na południe lub z zachodu na wschód, a odstępy pomiędzy kolejnymi przecznicami są równe jednej kratce. Szukamy najkrótszej możliwej drogi ulicami z punktu A do punktu B (rys. 1). Którędy należy iść i ile jest różnych dróg do wyboru?

2. Wykaż, że $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

3. Bilet do kina kosztuje 10 zł, w kasie jest dużo biletów i nie ma pieniędzy. W kolejce stoi, w przypadkowej kolejności, n osób z banknotami 10 zł oraz k osób posiadających jedynie banknot 20 zł, przy czym $n \geqslant k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kasjerowi w trakcie obsługi nie zabraknie reszty do wydawania?

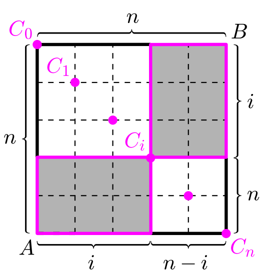
Rozwiązania



Rys. 1. Dwie z najkrótszych dróg z A do B: *ENNENEE* i *NEEEENN*.

R1. Najkrótsze drogi prowadzą na północ lub na wschód (rys. 1). Wszystkie są długości $n+k$, gdyż każda ma łącznie n kratek na wschód i k na północ.

Każdą taką drogę można utożsamić z jej opisem – ciągiem zawierającym n znaków E oraz k znaków N kodującym, czy na kolejnym skrzyżowaniu należy iść na północ (N), czy na wschód (E). Najkrótszych dróg jest więc tyle, ile takich ciągów, czyli $\binom{n+k}{n}$, bo na tyle sposobów można wybrać, na których n spośród wszystkich $n+k$ miejsc ciągu ma być znak E. □



Rys. 2

R2. Z zadania 1 wiemy, że liczba najkrótszych dróg „po kratkach” z lewego dolnego do prawego górnego rogu kwadratu $n \times n$ równa jest $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$.

Wyznaczmy tę samą liczbę inaczej. Każda z takich dróg musi przejść przez dokładnie jeden z n kolorowych punktów $C_0, C_1, \ldots, C_n$ z rysunku 2. Liczba najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez C_i jest iloczynem liczby najkrótszych dróg z A do C_i i liczby najkrótszych dróg z C_i do B, czyli – z zadania 1 – równa jest

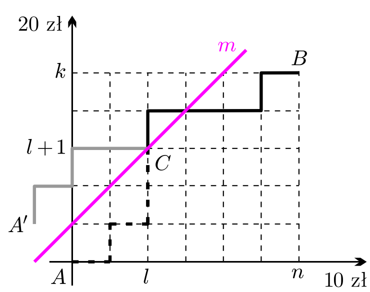
$$\binom{i+(n-i)}{i} \cdot \binom{(n-i)+i}{n-i} = \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i}.$$

Stąd liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B równa jest

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2,$$

co kończy dowód na mocy początkowej obserwacji, że dróg tych jest $\binom{2n}{n}$. □

$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, bo wybór i elementów z n równoważny jest odrzuceniu pozostałych $n-i$ elementów.



Rys. 3. Punkt (x, y) – kasjer dostał już x banknotów po 10 zł i y po 20 zł.

R3. Zilustrujmy kolejkę jako pewną drogę o $n+k$ krokach: w danym kroku idziemy w prawo, jeśli klient ma 10 zł, lub w górę, jeśli ma 20 zł. Aby kasjerowi nie zabrakło reszty, liczba wręczonych mu banknotów 20 zł nigdy nie może przekroczyć liczby banknotów 10 zł, które do tego momentu dostał. Innymi słowy, droga jest *dobra*, jeśli nie dotyka kolorowej prostej m z rysunku 3. Policzmy, ile jest *złych* dróg.

Niech dana zła droga pierwszy raz dotyka prostej m w punkcie $C = (l, l+1)$ (rys. 3). Jej część od punktu $A = (0,0)$ do punktu C odbijmy symetrycznie względem prostej m, uzyskując *półodbicie złej drogi* – nową drogę prowadzącą tylko w prawo lub w górę od punktu $A' = (-1, 1)$ do punktu $B = (n, k)$. Każda zła droga ma inne półodbicie. Ponadto każda najkrótsza droga z A' do B przecina prostą m, więc jest półodbiciem pewnej złej drogi. Stąd złych dróg jest tyle, ile ich półodbić, czyli najkrótszych dróg z A' do B, a więc, na mocy zadania 1,

$$\binom{(n+1)+(k-1)}{n+1} = \binom{n+k}{n+1}.$$

Wszystkich najkrótszych dróg z A do B jest $\binom{n+k}{n}$, więc liczba dobrych dróg to

$$\binom{n+k}{n} - \binom{n+k}{n+1} = \frac{n+1-k}{n+1}\binom{n+k}{n},$$

a prawdopodobieństwo, że kasjerowi nie zabraknie reszty, równe jest $\frac{n+1-k}{n+1}$. □

Liczba dobrych dróg dla $n = k$, czyli $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, to tzw. *$n$-ta liczba Catalana*.