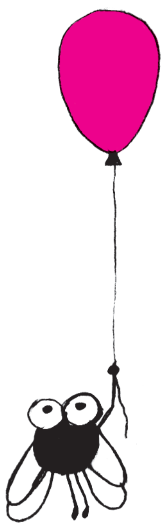
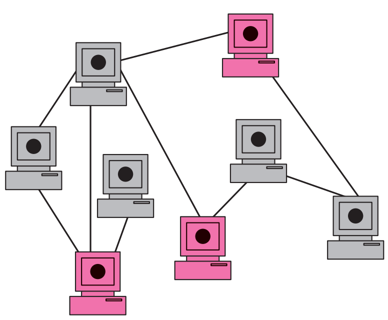
Z życia muchy

Zofia MIECHOWICZ*

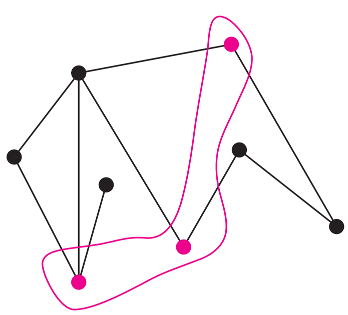


Zapewne każdy z nas dobrze zna muszkę owocówkę (*drosophila melanogaster*, co tłumaczy się dosłownie jako ciemnobrzucha miłośniczka rosy). Dla większości ta dobra znajomość niekoniecznie musi budzić dobre skojarzenia – być może z uwagi na jej natrętny muszy charakter i masową obecność letnią porą w pobliżu nieopatrznie zostawionych bez przykrycia słodkich owoców. Niemal równie powszechna jest wiedza o jej zasługach naukowych w dziedzinie genetyki. Mało kto zdaje sobie sprawę z tego, że to nie pies Łajka, a właśnie muszka była pierwszą ziemską istotą, która wybrała się w podróż kosmiczną. Ale czy ktoś uwierzy, że muszka pomogła również w rozwiązywaniu pewnego problemu z pogranicza matematyki i informatyki?



Rys. 1

Większość systemów komputerowych, z jakimi mamy obecnie do czynienia, to tak zwane systemy rozproszone, czyli niezależne urządzenia (stosując pewne uproszczenie, będziemy dalej mówić o procesorach) połączone, mniej lub bardziej ściśle, w jedną sieć, mogące się komunikować i sprawiające wrażenie jednej całości. Jednym z kluczowych zadań, przed jakim staje projektant takiego systemu, jest rozwiązanie problemu komunikacji. Ustanowienie bezpośredniego połączenia między każdymi dwoma urządzeniami w sieci byłoby nieefektywne i nieopłacalne, konieczne jest więc wyznaczenie możliwie najmniejszego zbioru procesorów (tak zwanych liderów), który będzie miał bezpośrednie połączenie z każdym procesorem z zewnątrz. Model matematyczny tego zagadnienia najłatwiej jest przedstawić w języku teorii grafów. Zbiór wszystkich komputerów w sieci możemy utożsamiać z wierzchołkami grafu, a strukturę połączeń pomiędzy nimi opisuje zbiór krawędzi tego grafu (rys. 1).



Rys. 2. Minimalny niezależny zbiór dominujący (czyli maksymalny zbiór niezależny) w grafie.

Zbiór parami niesąsiednich wierzchołków grafu, w którym swojego sąsiada ma każdy wierzchołek spoza zbioru, a do tego jest nienadmiarowy (czyli jeśli cokolwiek z niego zabierzemy, to przestanie mieć tę pierwszą cechę), w teorii grafów nosi nazwę minimalnego niezależnego zbioru dominującego. Jest to pojęcie dualne do pojęcia maksymalnego zbioru niezależnego. Maksymalny zbiór niezależny to taki, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią (niezależność) i nie możemy do niego dołożyć nic więcej, żeby własności niezależności nie stracić (maksymalność). Można wykazać, że minimalny niezależny zbiór dominujący jest jednocześnie maksymalnym zbiorem niezależnym i odwrotnie.

Szukanie zbioru liderów w rozproszonej sieci sprowadza się więc do wyznaczenia maksymalnego zbioru niezależnego w reprezentującym ją grafie. Jak znaleźć taki zbiór? Przyjrzyjmy się na początek najprostszym metodom.

Rozwiązanie 1. *Ustawiamy wierzchołki grafu w dowolnym porządku. Następnie zgodnie z zadanym porządkiem sprawdzamy, czy kolejne wierzchołki mogą znaleźć się w zbiorze liderów (czy nie mają już w tym zbiorze sąsiada). Jeżeli tak, to dodajemy taki wierzchołek do zbioru.*

Rozwiązanie 2. *Ustawiamy wierzchołki grafu w dowolnym porządku. Następnie zgodnie z zadanym porządkiem dodajemy wierzchołek do zbioru liderów, natomiast wszystkich jego sąsiadów wyrzucamy z rozważań.*

Te najprostsze algorytmy są jednocześnie stosunkowo szybkie. Oba działają liniowo względem liczby krawędzi. Jednak oba te podejścia mają naturę sekwencyjną i w związku z tym średnio pasują do modelu systemów rozproszonych. W 1982 roku znany informatyk-teoretyk Leslie Valiant uznał problem wyznaczania maksymalnego zbioru niezależnego za jedno z większych wyzwań informatyki teoretycznej, twierdząc jednocześnie, że trudno sobie wyobrazić, w jaki sposób ten problem mógłby być rozwiązany równolegle w istotnie mniejszej liczbie kroków. Trzy lata później Avi Wigderson i Richard Karp znaleźli skomplikowany algorytm

*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

o złożoności $O(\log^3 n)$, który następnie poprawił zespół pod kierunkiem Nogi Alona, izraelskiego matematyka i informatyka, uzyskując algorytm o złożoności $O(\log n)$.

Mamy zatem efektywne algorytmy rozwiązujące problem znajdowania maksymalnego zbioru niezależnego w grafie. W każdym z nich każdy wierzchołek musi znać swoich sąsiadów w grafie, podczas gdy w prawdziwych sieciach mogą występować ograniczenia możliwości komunikacji. Wyobraźmy sobie, na przykład, system kontroli lotu działający w ten sposób, że zrzucamy z samolotu na pewnym terenie tysiące urządzeń monitorujących, które mają się komunikować. Urządzenia mogą jedynie wysyłać sygnały do urządzeń znajdujących się w odpowiedniej odległości. Mamy sieć, którą można reprezentować za pomocą grafu, którego wierzchołki będą odpowiadały urządzeniom, natomiast krawędzie będzie determinowała odległość między nimi. Niestety, urządzenia zostały rozmieszczone na danym terenie w sposób losowy i nie mamy pojęcia, jak wygląda faktyczna struktura sieci. Co możemy zrobić w takim przypadku?

Okazuje się, że natura dawno wymyśliła za nas rozwiązanie tego problemu, a klucz do niego umieściła na głowie muszki owocówki. Ten fakt zaobserwowała oraz opracowała pod kątem matematycznym grupa matematyków i biologów, w skład której wchodzili: Yehuda Afek, Noga Alon, Omer Barad, Eran Hornstein, Naama Barkai i Ziv Bar-Joseph. Wyniki swoich obserwacji zawarli w artykule *A biological solution to a fundamental distributed computing problem* (Biologiczne rozwiązanie podstawowego problemu obliczeń rozproszonych), który ukazał się w prestiżowym czasopiśmie *Science*.

Dorosła muszka ma na głowie zespół włoskowatych organów sensorycznych. Kształtują się one jeszcze w stadium larwalnym z sąsiadujących, równorzędnych komórek. Nie ma jednak żadnego klucza, który pomógłby nam wskazać, z których komórek (nazywanych POS-ami) wykształcą się organy sensoryczne. Wiemy natomiast, czym charakteryzują się wybrane już POS-y:

- każda z komórek zostaje POS-em lub sąsiadem POS-a,
- żadne dwa POS-y nie są sąsiadami.

Na głowie muszki tworzy się więc maksymalny zbiór niezależny w grafie komórek – zbiór POS-ów. Poszczególne komórki nie mają informacji, jak wygląda całość struktury. Mogą jedynie wysyłać do swoich sąsiadów sygnał (produkując duże stężenie proteiny Delta), że chcą zostać POS-em. Cały proces trwa około trzech godzin i zawsze kończy się sukcesem. Muszka potrafi zrobić dokładnie to, o co nam chodzi! Algorytm, którego mogliśmy się od niej nauczyć, jest zaskakująco prosty.

Rozwiązanie 3

- *Pewien losowy zbiór komórek wyraża chęć zostania POS-em i wysyła sygnał do wszystkich swoich sąsiadów.*
- *Każda komórka, która chce zostać POS-em i nie otrzymała sygnału od żadnego ze swoich sąsiadów, zostaje POS-em.*
- *Każdy POS „usypia” wszystkich swoich sąsiadów.*
- *Cała procedura powtarza się na zbiorze komórek, które nie zostały jeszcze wybrane na POS-y ani uśpione.*

Algorytm ten wykonuje pesymistycznie $O(\log^2 n)$ iteracji i z dużym prawdopodobieństwem łączna liczba wysyłanych w nim sygnałów jest optymalna (z dokładnością do stałego czynnika). Czytelników obeznanych z informatyczną terminologią i poszukujących ciekawych szczegółów odsyłam do wspomnianego wyżej artykułu. Tekstowi, który ukazał się w czasopiśmie, towarzyszą filmy przedstawiające proces wyboru POS-ów u muszki oraz dodatek zawierający wszelkie techniczne szczegóły.

Rozwiązanie zadania F 845.
Postać transformacji pól nie zależy od tego, z jakich źródeł pochodzą. Możemy więc dla uproszczenia wyobrazić sobie, że pole, które bada pierwszy obserwator, zostało wytworzone przez spoczywającą względem niego jednorodnie naładowaną płaszczyznę. Ze względu na tzw. skrócenie Lorentza obserwator poruszający się z prędkością v równoległą do naładowanej płaszczyzny stwierdzi, że powierzchniowa gęstość zgromadzonego na niej ładunku wynosi

$$\sigma' = \sigma/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(gdzie c oznacza prędkość światła), a więc mierzona przez niego wartość składowej natężenia pola elektrycznego prostopadłej do płaszczyzny to

$$E' = E/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

gdzie E oznacza wartość mierzoną w układzie spoczynkowym płaszczyzny.

Dla obserwatora poruszającego się z prędkością prostopadłą do płaszczyzny gęstość ładunku będzie taka sama, jak w układzie spoczynkowym płaszczyzny, a więc zmierzy on także takie samo natężenie pola, jak mierzone w układzie spoczynkowym.

Łącząc oba wnioski, stwierdzamy, że drugi obserwator (poruszający się z prędkością v) zmierzy taką samą wartość składowej pola równoległej do jego kierunku ruchu, jak obserwator spoczywający i $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ razy większą wartość składowej prostopadłej.

POS to skrót prekursora organu sensorycznego.

Rozwiązanie zadania M 1406.
Niech G będzie grafem o $2n$ wierzchołkach oznaczających wiersze i kolumny planszy. Krawędź pomiędzy wierszem w a kolumną k jest w G wtedy i tylko wtedy, gdy punkt o współrzędnych (w, k) jest zamalowany. Graf G ma więc $2n$ krawędzi. Jak wiadomo, jeśli graf o N wierzchołkach nie ma cyklu, to ma co najwyżej $N - 1$ krawędzi. Zatem G zawiera cykl. Z definicji krawędzi w G wynika, że będzie on parzystej długości $2m$ i wyznaczone przez niego krawędzie to szukane punkty $a_1, \ldots, a_{2m}$.