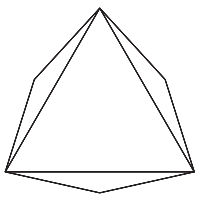
Kąty trójścienne

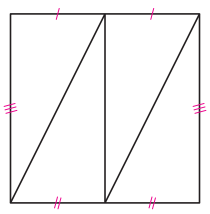
Joanna JASZUŃSKA

Jakie warunki spełniać muszą trzy kąty płaskie, aby można było z nich zbudować *wypukły kąt trójścienny*, czyli przestrzenne naroże o trzech krawędziach? Otóż suma każdych dwóch kątów musi być większa od trzeciego (podobnie jak odcinki, z których chcemy zbudować trójkąt, spełniać muszą nierówność trójkąta). Przykładowo, figura z rysunku 1 nie jest siatką czworościanu – wystarczy wyobrazić sobie próbę złożenia tej niby-siatki, by dostrzec, które pary kątów są w sumie zbyt małe.



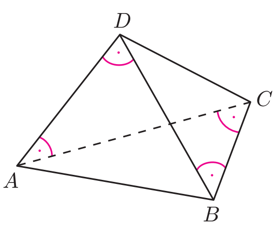
Rys. 1

1. Czy rysunek 2 przedstawia siatkę czworościanu?



Rys. 2

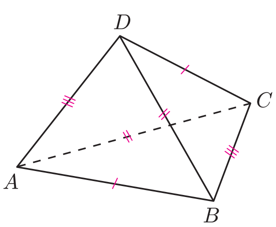
2. Czy istnieje czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 90^\circ$ (rys. 3)?



Rys. 3

3. Udowodnij, że w każdym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym trzy kąty płaskie są ostre.

4. Wykaż, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ mamy $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ (rys. 4), to wszystkie ściany czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.



Rys. 4

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$ oraz $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAD > \sphericalangle ADC$.

Rozwiązania

R1. Nie. Wystarczy spojrzeć na dowolny wierzchołek: suma dwóch mniejszych kątów przy nim równa jest 90°, czyli trzeciemu kątowi. □

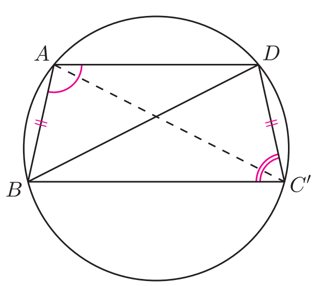
R2. Nie. Kąty płaskie przy wierzchołku A spełniają warunek $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD > \sphericalangle CAD = 90^\circ$. Z kolei rozważając kąt trójścienny przy B oraz trójkąty prostokątne ABC i ABD, wnioskujemy, że $90^\circ = \sphericalangle CBD < \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = (90^\circ - \sphericalangle BAC) + (90^\circ - \sphericalangle BAD)$, czyli $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD < 90^\circ$ – sprzeczność. □

R3. Suma wszystkich kątów płaskich czworościanu równa jest $4 \cdot 180^\circ$, jako suma kątów czterech trójkątów. Wobec tego istnieje taki wierzchołek czworościanu, przy którym suma trzech kątów płaskich nie przekracza 180°, w przeciwnym razie suma wszystkich kątów płaskich czworościanu przekraczałaby $4 \cdot 180^\circ$.

Oznaczmy kąty płaskie przy tym wierzchołku przez α, β, γ. Wówczas $\alpha < \beta + \gamma$, więc $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma \leqslant 180^\circ$, czyli $\alpha < 90^\circ$. Analogicznie $\beta < 90^\circ$ oraz $\gamma < 90^\circ$. □

R4. Z danych równości wynika, iż wszystkie ściany rozważanego czworościanu są trójkątami przystającymi. Oznaczmy kąty ściany ABC przez α, β, γ; ich suma to 180°. W każdym wierzchołku czworościanu schodzą się takie właśnie trzy kąty płaskie. Stąd $\alpha < \beta + \gamma$, więc $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, czyli $\alpha < 90^\circ$. Analogicznie $\beta < 90^\circ$ oraz $\gamma < 90^\circ$. □

R5. Obróćmy ścianę BCD danego czworościanu wokół krawędzi BD tak, aby znalazła się w płaszczyźnie ściany ABD, ale po przeciwnej stronie prostej BD (rys. 5). Na uzyskanym w ten sposób czworokącie $ABC'D$ można opisać okrąg, gdyż $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BC'D = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.



Rys. 5

Analizując kąty wpisane w ten okrąg, oparte na równych łukach, dostajemy $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC' + \sphericalangle DAC' = \sphericalangle BDC' + \sphericalangle BDA = \sphericalangle BDC + \sphericalangle BDA > \sphericalangle ADC$, przy czym ostatnią nierówność otrzymujemy, rozważając kąt trójścienny przy wierzchołku D czworościanu. To kończy dowód. □

Zadania domowe

6. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w którym $\sphericalangle ASB = 2\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle BSC = 2\sphericalangle CSD$ oraz $\sphericalangle CSD = 2\sphericalangle DSA$?

7. Na rysunku 1 zmodyfikujmy kształty trójkątów tak, aby odpowiednie pary odcinków, które mają się skleić, nadal były równe oraz by przy każdym wierzchołku docelowego czworościanu dowolne dwa kąty płaskie były w sumie większe od trzeciego. Czy te warunki wystarczają, by otrzymać siatkę pewnego czworościanu?

8. (a) Wykaż, że istnieje czworościan o kwadratowej siatce.
(b) Wykaż, że istnieje czworościan o wszystkich ścianach prostokątnych.

Zadania 3, 4 i 5 pochodzą odpowiednio z XXVIII, XXIV i LXIV Olimpiady Matematycznej.