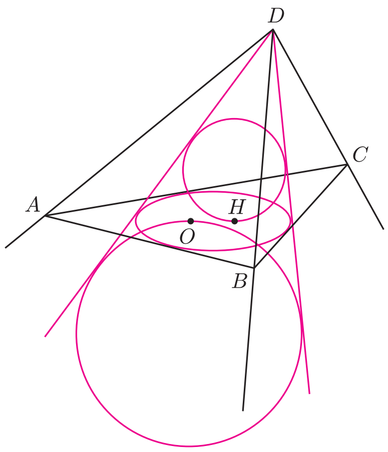
Kącik przestrzenny (20): Sfery Dandelina

Sfery, o których jest mowa na sąsiedniej stronie, nazywane są *sferami Dandelina* na cześć francuskiego matematyka Germinala Pierra Dandelina (1794–1847), który badając stożkowe, rozwinął pomysły Apoloniusza z Pergi (III w. p.n.e.).

Związane z nimi zależności pozwalają błyskawicznie rozwiązać wiele zadań dotyczących stożkowych. Tu zajmiemy się tylko elipsami. Zaczniemy od zadania, które rozwiązaliśmy w Kąciku 2 inną metodą.

1. (OM 54-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H, a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.*



Rys. 1

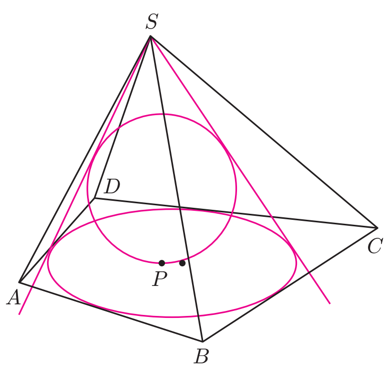
Rozwiązanie. Oznaczmy przez s_1 i s_2 rozpatrywane sfery. Niech s będzie stożkiem o wierzchołku D, w który wpisane są sfery s_1 i s_2 (każda tworząca stożka s jest wspólną styczną sfer s_1 i s_2). Posługując się sferami Dandelina, wnioskujemy, że część wspólna płaszczyzny ABC i stożka s jest elipsą wpisaną w trójkąt ABC, a punkty O i H to jej ogniska. W takim razie spełnione są równości

$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle CBO \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCH = \sphericalangle ACO.$$

Wiadomo, że jeśli punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a H punktem przecięcia jego wysokości, to powyższe równości są spełnione. Z drugiej strony dla danego punktu O punkt H jest jednoznacznie wyznaczony przez powyższe zależności. Skoro więc O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H musi być punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Zachęcam Czytelnika do porównania tego rozumowania z rozwiązaniem tego zadania przedstawionym w Kąciku 2. Okazuje się, że spora część tego rozwiązania jest właściwie ukryta w powyższym. Opisana tu metoda to spojrzenie z nieco innego punktu widzenia, co czasem pozwala na wymyślenie krótszego rozwiązania.

Spójrzmy na inne zadanie, które także można bardzo szybko rozwiązać, wykorzystując sfery Dandelina.



Rys. 2

2. (OM 59-I-8) *Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P. Dowieść, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°$.*

Rozwiązanie. Niech s będzie stożkiem o wierzchołku S, w który wpisana jest sfera wpisana w ostrosłup $ABCDS$. Część wspólna tego stożka z płaszczyzną podstawy jest elipsą wpisaną w czworokąt $ABCD$, a punkt P jest jej ogniskiem. Teza zadania jest po prostu jedną ze znanych własności elipsy wpisanej w czworokąt.

Jeśli Czytelnik nie zna tej własności, o której mowa, to łatwo ją udowodni, wykorzystując poniższy fakt (dowód można też znaleźć np. w broszurze 51. Olimpiady Matematycznej).

Fakt. *Dana jest elipsa o ogniskach A i B i punkt P leżący na zewnątrz elipsy. Proste PK i PL są styczne do tej elipsy. Wówczas $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PAL$.*

Wskazówka: Obrazy symetryczne ogniska pewnej elipsy względem stycznych do niej leżą na okręgu o środku w drugim ognisku tej elipsy.

Na zakończenie (także całej serii Kącików przestrzennych) jeszcze jedno zadanie, do którego przydadzą się sfery Dandelina.

3. (OM 60-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S. Odcinek PT jest średnicą tej sfery, a punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych AT, QT, RT, ST z płaszczyzną BCD. Dowieść, że punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.*

Michał KIEZA