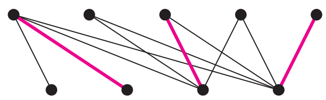
W grafach dwudzielnych jest łatwiej

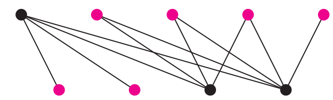
Jakub RADOSZEWSKI

Cztery parametry. Tym, co najczęściej robi się w grafach dwudzielnych, jest znajdowanie najliczniejszego skojarzenia. Można jednak rozważać aż cztery – parami dualne – parametry powiązane z najliczniejszym skojarzeniem. Oto one:

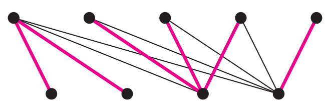
Najliczniejszy zbiór niezależny krawędzi (**nk**) to najliczniejszy podzbiór krawędzi, w którym żadne dwie nie są incydentne, czyli właśnie najliczniejsze skojarzenie w grafie.



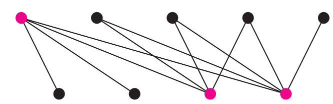
Najliczniejszy zbiór niezależny wierzchołków (**nw**) to najliczniejszy podzbiór wierzchołków, w którym żadne dwa nie są sąsiednie, czyli żadne dwa nie są połączone krawędzią.



Najmniejsze pokrycie krawędziowe (**pk**) to najmniej liczny podzbiór krawędzi, taki, że każdy wierzchołek jest incydentny z co najmniej jedną z nich.



Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe (**pw**) to najmniej liczny podzbiór wierzchołków, taki, że każda krawędź jest incydentna z co najmniej jednym z nich.

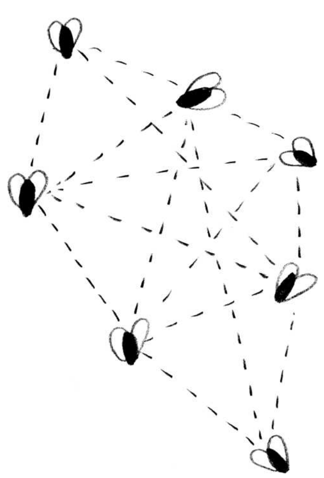


Jak łatwo zauważyć, powyższe definicje można również odnieść do zupełnie dowolnego grafu, a nie tylko do grafu dwudzielnego. Jednak w przypadku grafów dwudzielnych związki między podanymi pojęciami okażą się o wiele bardziej widoczne.

Oznaczmy przez n łączną liczbę wierzchołków w grafie. Odtąd założymy, że w grafie nie występują wierzchołki izolowane, czyli wierzchołki nieincydentne z żadną krawędzią. Wówczas zachodzą następujące równości, wiążące rozważane parametry w pary. Są to tzw. równości Gallaia. Są one prawdziwe w dowolnym grafie, jednak Czytelnikowi może być łatwiej je sobie wyobrazić w kontekście grafu dwudzielnego.

Założenie o braku wierzchołków izolowanych będzie nam potrzebne w dowodzie dokładnie jednej równości. Czy potrafisz, Drogi Czytelniku, odnaleźć ten fragment dowodu?

pw + nw = $\boldsymbol{n}$**.** Niech X oznacza dowolne pokrycie wierzchołkowe w grafie. Rozważmy zbiór $Y = V \setminus X$. Wówczas żadne dwa wierzchołki ze zbioru Y nie mogą być połączone krawędzią, gdyż byłaby to krawędź niepokryta przez wierzchołki ze zbioru X. Stąd zbiór Y jest zbiorem niezależnym wierzchołków (patrz też rysunki powyżej). Przyjmując jako X najmniejsze pokrycie wierzchołkowe, otrzymujemy nierówność $\mathbf{nw} \geqslant n - \mathbf{pw}$.

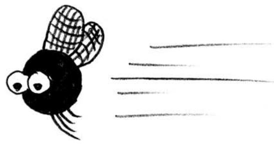


Podobnie widzimy, że jeśli Y' jest dowolnym zbiorem niezależnym wierzchołków, to $X' = V \setminus Y'$ jest pokryciem wierzchołkowym w grafie. Stąd $\mathbf{pw} \leqslant n - \mathbf{nw}$. Z połączenia otrzymanych nierówności uzyskujemy żądaną równość.

pk + nk = $\boldsymbol{n}$**.** Znów wykażemy tak naprawdę dwie nierówności. Zacznijmy od nierówności $\mathbf{pk} \leqslant n - \mathbf{nk}$. Niech M oznacza najliczniejsze skojarzenie w grafie, o liczności **nk**. Będziemy chcieli dołożyć pewne krawędzie do M, tak aby otrzymać pokrycie krawędziowe P. Skojarzenie M pokrywa $2 \cdot \mathbf{nk}$ wierzchołków, do pokrycia pozostaje więc $n - 2 \cdot \mathbf{nk}$ wierzchołków. Każdy z nich jest incydentny z jakąś krawędzią – dodajmy zatem do P po jednej takiej krawędzi na każdy z tych wierzchołków (wcześniejsze rysunki stanowią tego dobrą ilustrację). Łącznie $|P| = \mathbf{nk} + (n - 2 \cdot \mathbf{nk}) = n - \mathbf{nk}$, skąd $\mathbf{pk} \leqslant n - \mathbf{nk}$.

Uzasadnimy teraz nierówność $\mathbf{nk} \geqslant n - \mathbf{pk}$. Niech P' oznacza najmniejsze pokrycie krawędziowe w grafie. Wówczas graf $G' = (V, P')$ jest *lasem*, czyli grafem acyklicznym. Faktycznie, gdyby jakieś krawędzie w P' tworzyły cykl, to po usunięciu dowolnej z nich P' wciąż byłoby pokryciem krawędziowym, tyle że mniej licznym. Znanym faktem jest, że las o n wierzchołkach i k krawędziach składa się z $n - k$ spójnych składowych. Tak więc graf G' składa się z $n - |P'|$ spójnych składowych, z których każda zawiera co najmniej jedną krawędź (inaczej P' nie pokrywałoby wszystkich wierzchołków). Z każdej ze spójnych

Podobnie można uzasadnić, że G' jest lasem *gwiazd*, czyli że każda jego spójna składowa zawiera wierzchołek centralny połączony z wszystkimi pozostałymi.



składowych G' możemy teraz wybrać po jednej krawędzi. Otrzymany zbiór krawędzi na pewno będzie skojarzeniem, gdyż każda z krawędzi pochodzi z innej spójnej składowej. Stąd $\mathbf{nk} \geqslant n - \mathbf{pk}$. Obie nierówności dają łącznie równość, którą chcieliśmy uzyskać.

Rozwiązanie zadania M 1404.
Załóżmy, że $|AB| = x + y$, gdzie y to długość odcinka z ruchomą taśmą. Jeśli Jaś zasznuruje but poza taśmą, to pokona trasę w czasie

$$t_1 = t + \frac{x}{v} + \frac{y}{v+u}.$$

Jeśli natomiast zasznuruje but na taśmie, to przejście trasy zajmie czas

$$t_2 = \frac{x}{v} + t + \frac{y - tu}{v+u} = t_1 - \frac{tu}{v+u} < t_1.$$

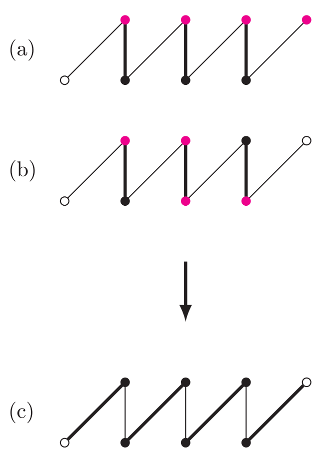
Wobec tego powinien zasznurować but na taśmie.

Dotychczasowe równości zachodziły w dowolnych grafach. Poniższa równość, znana także pod nazwą twierdzenia Königa, jest jedną z najlepiej znanych własności grafów dwudzielnych.

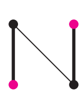
nk = pw. W tym przypadku nierówność $\mathbf{pw} \geqslant \mathbf{nk}$ otrzymujemy za darmo – wszak aby pokryć krawędzie z najliczniejszego skojarzenia, trzeba na każdej z nich wybrać jakiś wierzchołek. Natomiast dużo ciekawsze jest uzasadnienie, że taka liczba wierzchołków zawsze wystarczy. Przeprowadzimy je, podając algorytm wyboru wierzchołków do pokrycia. Dowód przez algorytm – to w sumie ciekawe!

Algorytm działa na zasadzie wymuszeń. Do konstruowanego pokrycia możemy wziąć tylko **nk** wierzchołków, możemy więc wybierać jedynie wierzchołki będące końcami krawędzi z pewnego najliczniejszego skojarzenia. Jeśli więc jakaś krawędź w grafie prowadzi do wierzchołka nieskojarzonego, to jej drugi koniec – będący z pewnością wierzchołkiem skojarzonym – musimy wybrać do pokrycia.

W ten sposób wybierzemy do pokrycia pewien zbiór wierzchołków skojarzonych. Niech u będzie jednym z tych wierzchołków i niech v będzie wierzchołkiem, który jest połączony z u krawędzią ze skojarzenia. Jeśli z v wychodzi jakaś krawędź do innego wierzchołka w, który jeszcze nie jest w pokryciu, to wiemy, że w musimy umieścić w pokryciu. Dokładamy zatem w do pokrycia. W wyniku tego sąsiad wierzchołka w w skojarzeniu może spowodować kolejne wymuszenia itd.



Warto zastanowić się nad tym, jak może skończyć się ta sekwencja wymuszeń. Na pewno byłoby źle, gdyby w pokryciu znalazł się jakiś wierzchołek nieskojarzony, jak w przypadku (a), lub para wierzchołków skojarzonych, jak w przypadku (b). Przypadki te zostały zilustrowane na marginesie. W każdym z nich mamy do czynienia ze ścieżką, której końcami są wierzchołki nieskojarzone (puste kółka) i w której naprzemiennie występują krawędzie ze skojarzenia i spoza skojarzenia. Jest to tzw. *ścieżka powiększająca*; pojęcie to pojawiło się już w artykule Tomasza Idziaszka. Jeśli zamienić w takiej ścieżce krawędzie skojarzone na nieskojarzone i odwrotnie (sytuacja (c)), otrzyma się skojarzenie liczniejsze od obecnego, co nie jest możliwe, ponieważ zaczęliśmy od skojarzenia najliczniejszego.



Wiemy zatem, że w wyniku wymuszeń z każdej pary wierzchołków skojarzonych wybierzemy do pokrycia wierzchołkowego co najwyżej jeden oraz że w pokryciu nie będzie żadnych innych wierzchołków. A co z pozostałymi krawędziami ze skojarzenia – tymi, z których nie został wybrany żaden wierzchołek? Czy możemy w każdej z nich po prostu wybrać do pokrycia po jednym, dowolnym wierzchołku? Niestety nie, co pokazuje rysunek na marginesie. Możemy jednak w każdej parze wybrać wierzchołek po tej samej stronie grafu dwudzielnego. Wówczas już otrzymamy poprawne pokrycie wierzchołkowe, czego nietrudne sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi. To koniec dowodu twierdzenia Königa – nasz algorytm poprawnie konstruuje pokrycie wierzchołkowe o liczności **nk**.

Z połączenia wszystkich równości, jakie otrzymaliśmy po drodze, uzyskujemy jeszcze jedną do kompletu: **pk = nw.** Oto pełny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{nk} & + & \mathbf{pk} & = & n \\ \| & & \| & & \\ \mathbf{pw} & + & \mathbf{nw} & = & n \end{array}$$

Zadanie na deser. Kliką dwudzielną nazywamy podzbiór wierzchołków grafu dwudzielnego, w którym każde dwa wierzchołki leżące po różnych stronach grafu są połączone krawędzią. Jak znaleźć najliczniejszą klikę dwudzielną w danym grafie dwudzielnym?